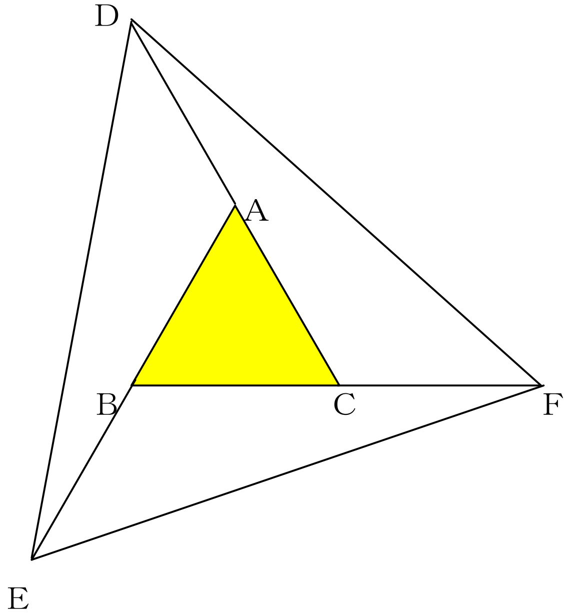
図形の変わった変換

＜原題＞　正三角形ＡＢＣの各辺を２倍に伸ばして３点ＤＥＦを作ると，△ＡＢＣと△ＤＥＦにはどのような関係があるだろうか？



（予想と問題設定）

(1)　△ＤＥＦも正三角形だろう。（△ＡＢＣ∽△ＤＥＦ）

(2)　相似であれば，相似比はいくらだろうか？

(3)　２つの三角形の中心（重心）は一致するだろう。

元と拡大した三角形どうしが相似になることはあるのだろうか？未解決

また、各辺をそれぞれ何倍に拡大したら、相似になるだろうか？

§１　正三角形

＊以下，ＡＢ＝１とする。

(1)の証明

△ADE≡△BEF≡△CFA は明らか

よって，DE＝EF＝FD より　△DEF も正三角形である。

(2)について

（高橋の解答）

＜高校：余弦定理の利用＞

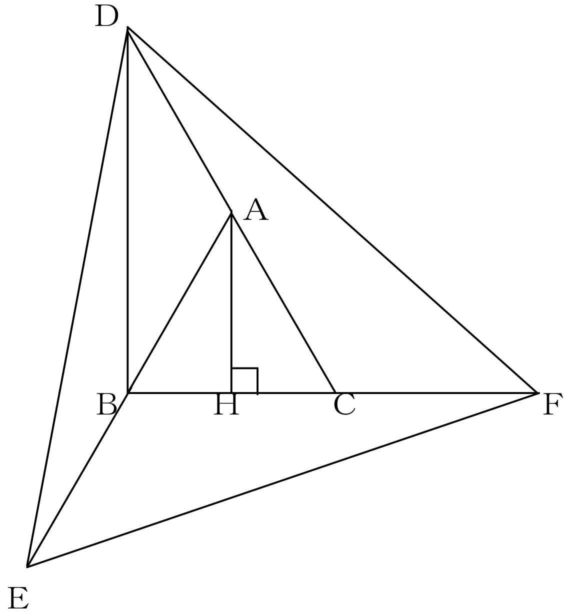
△ＣＤＥにおいて，余弦定理より

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 - 2CD \cdot CF\cos\angle DCF = 4 + 1 - 2\times2\times1\times\cos120^\circ$$

$$= 4 + 1 - 2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$　　よって，$DF=\sqrt{7}$

（藤本の解答）＜中学：三平方の定理の利用＞

ＡからＢＣに垂線ＡＨを下ろす。



△ＣＡＨと△ＣＤＢにおいて，

ＣＡ：ＣＤ＝ＣＨ：ＣＢ＝１：２　∠Ｃは共通

よって，△ＣＡＨ∽△ＣＤＢ

したがって，∠ＤＢＣ＝∠Ｒ

$\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　$\mathrm{BD}=\sqrt{3}$

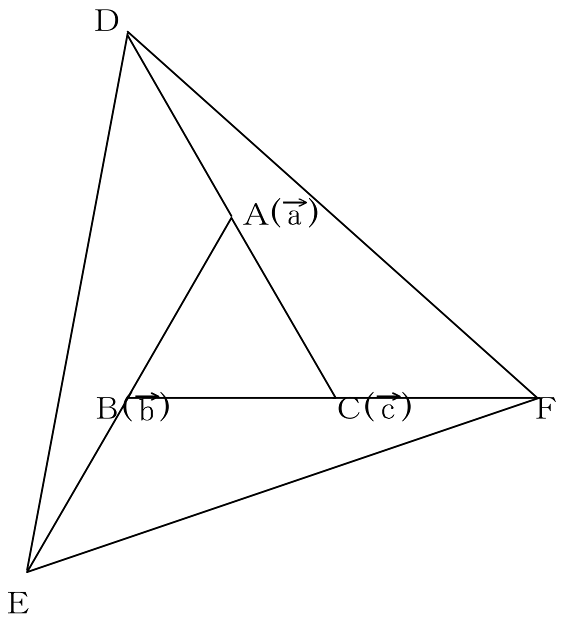
ＢＦ＝２より，三平方の定理から

$\mathrm{DF}=\sqrt{\mathrm{BD}^2+\mathrm{BF}^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

⑶について

（二宮の解答）

＜高校：ベクトルの利用＞



△ＡＢＣの重心をＧ，△ＤＥＦの重心をＰとする。

Ａ，Ｂ，Ｃの位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とすると，

Ｄの位置ベクトル$\vec{d}$は，Ｄが線分ＣＡを１；２に外分する点だから

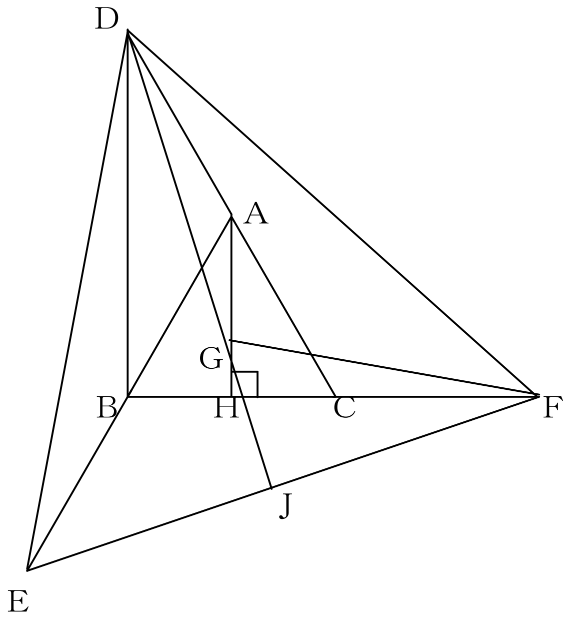
$$\vec{d}=\frac{-2\vec{a}+\vec{b}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{c}$$

同様に，$\vec{e}=2\vec{b}-\vec{a}$　　$\vec{f}=2\vec{c}-\vec{b}$

$$\vec{g}'=\frac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3}=\frac{2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{b}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\vec{g}$$

したがって，２つの三角形の重心は一致する。

＜中学：三平方の定理の利用＞



ＥＦの中点をＪとすると，$\mathrm{DJ}=\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\mathrm{HG}=\frac{1}{3}\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\mathrm{HF}=\frac{3}{2}$より

$$\mathrm{GF}=\sqrt{\mathrm{HG}^2+\mathrm{HF}^2}=\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{28}{12}}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

同様に，$\mathrm{EG}=\mathrm{DG}=\frac{\sqrt{21}}{3}$である。

３辺が等しいので，△ＤＥＧ≡ＤＦＧ

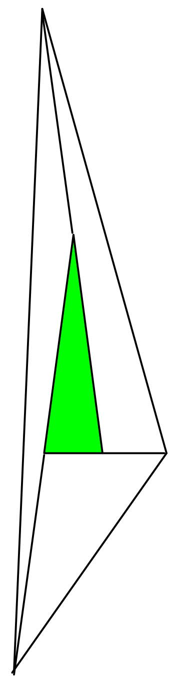
よって，Ｇは∠ＥＤＦの二等分線上にある。

また，$\mathrm{DG}:\mathrm{DJ}=\frac{\sqrt{21}}{3}:\frac{\sqrt{21}}{2}=2:3$より，Ｇは△ＤＥＦの重心でもある。

§２　直角三角形での相似

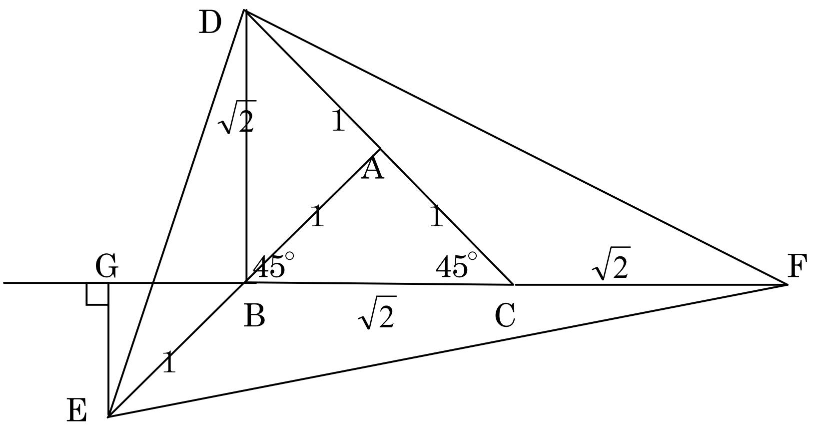
＊２つの三角形の相似は，どんな三角形でも成り立つのか？

①＜藤本の予想＞　頂角が小さい二等辺三角形では，成り立たないだろう。



②＜二宮の予想＞　直角三角形では，成り立たないだろう。

（小橋の解答）△ABC を AB＝１の直角二等辺三角形とする。



$$\mathrm{DF}=\sqrt{\mathrm{BD}^2+\mathrm{BF}^2}=\sqrt{\sqrt{2}^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$$

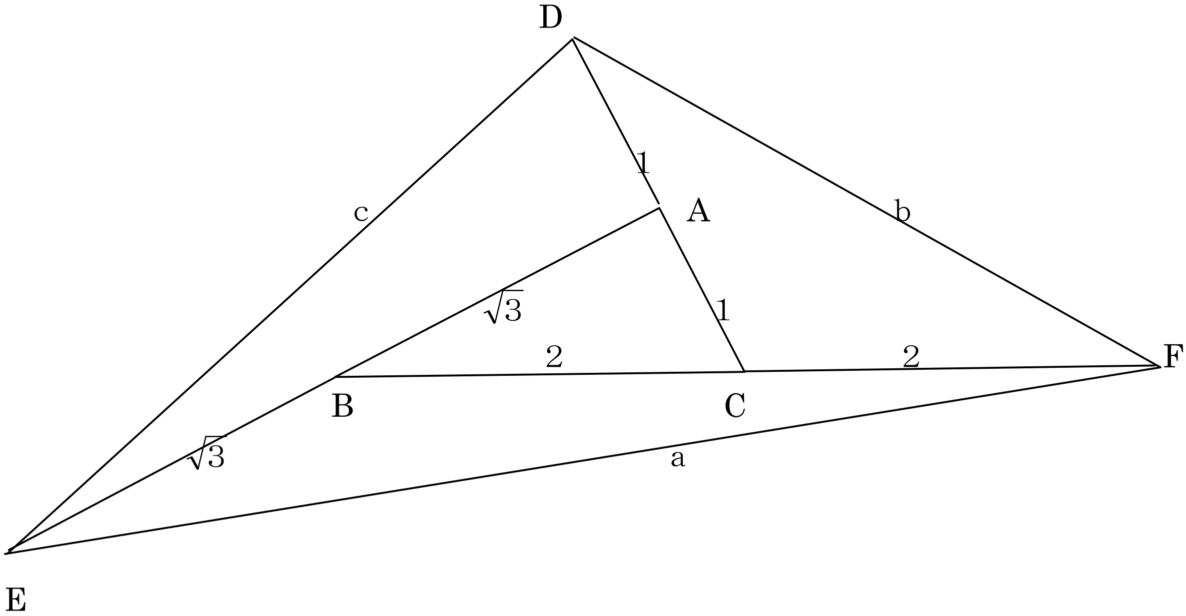
$$\mathrm{DE}=\sqrt{\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$\mathrm{GE}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\mathrm{GF}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ より

$$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{GE}^2+\mathrm{GF}^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$$

よって，$\mathrm{DE}^2+\mathrm{DF}^2\neq\mathrm{EF}^2$ なので，△DEF は直角三角形ではない。

（小林の解答）△ABC を１，２，$\sqrt{3}$ の直角三角形とする。



△ＢＥＦで，$a^2=4^2+(\sqrt{3})^2-2\times4\times\sqrt{3}\cos150^\circ$

$$=16+3-8\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=31$$

△CFD で，$b^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120^\circ$

$$=4+4-8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=12$$

△ADE で，$c^2=1^2+(2\sqrt{3})^2=13$

よって，$a^2\neq b^2+c^2$ であるから，△ＤＥＦは直角三角形ではない。

§３　一般の三角形での重心

１．一般の三角形について，２つの三角形の五心は一致するのか？

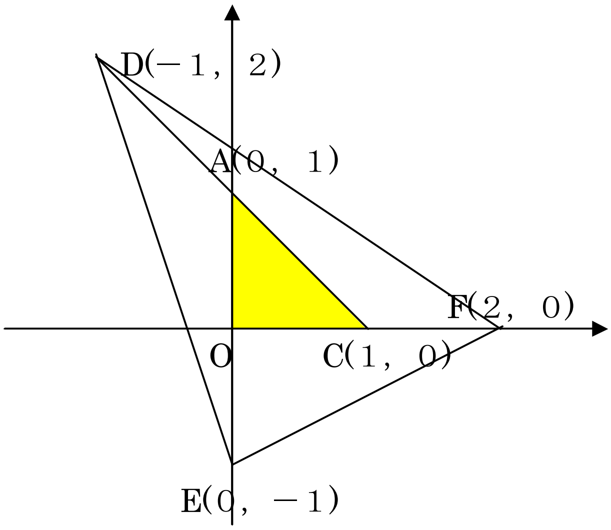
＜作図ソフトによる確認＞

●重心は，一致する

●内心，垂心，外心，傍心はどれも一致しない

まず，重心の一致について直角三角形で考えてみよう。

２．直角二等辺三角形における重心一致の証明
（アイーダによる証明）



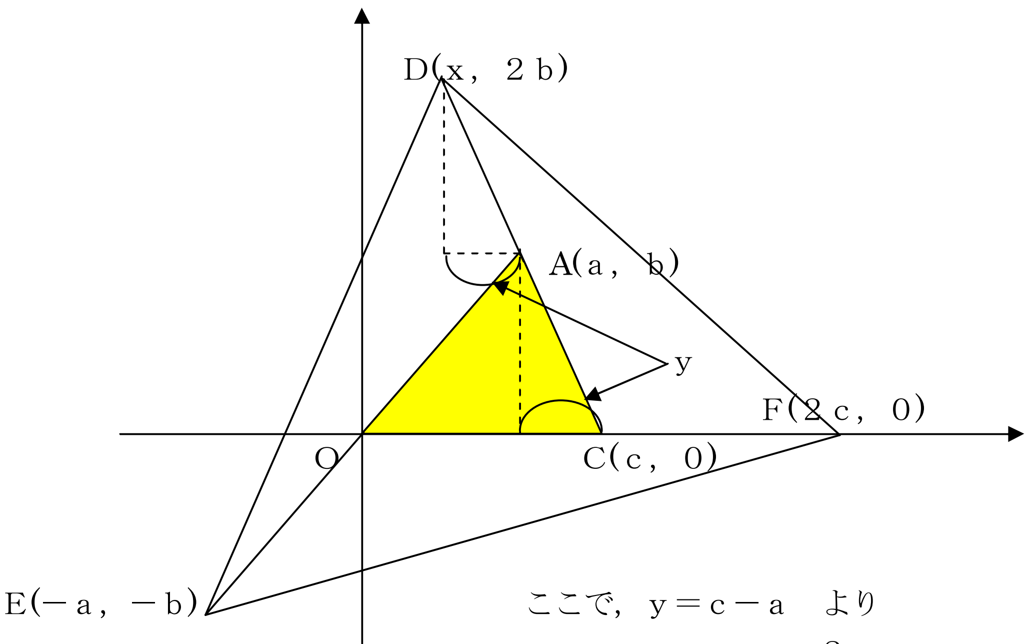
△AOC の重心 G は$\left(\dfrac{0+0+1}{3},\dfrac{1+0+0}{3}\right)$より　G$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

△DEF の重心 G’は$\left(\dfrac{-1+0+2}{3},\ \dfrac{2-1+0}{3}\right)$より　G’$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

したがって，G と G’は一致する。

一般の三角形ではどうか。

３．一般の三角形における重心一致の証明
（アイーダによる証明）



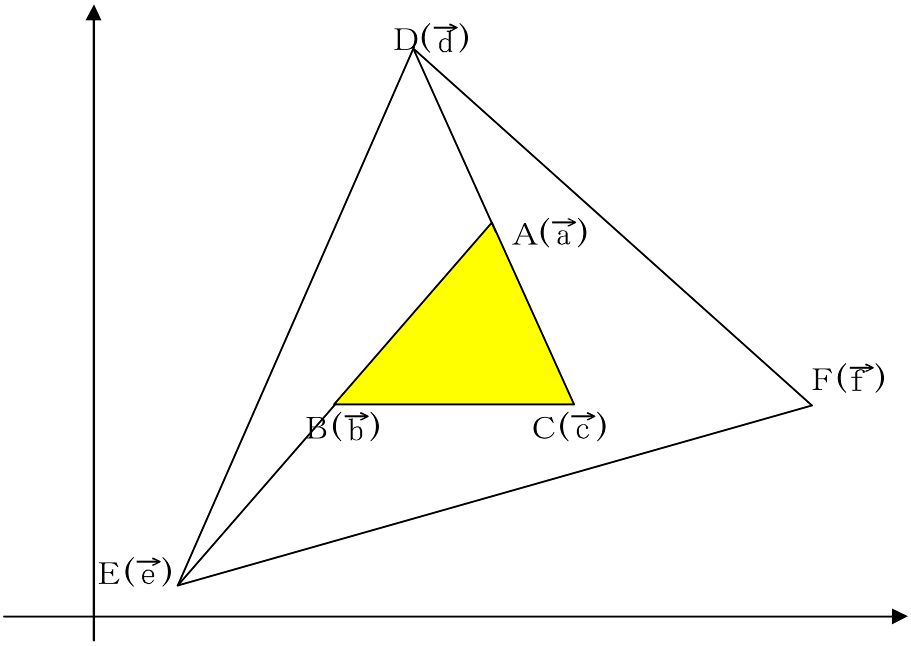
ここで，y＝c−a　より
x＝a−y＝2a−c

△AOCの重心Gは$\left(\dfrac{a+0+c}{3},\ \dfrac{b+0+0}{3}\right)$より　G$\left(\dfrac{a+c}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$

△ＤＥＦの重心はG’は$\left(\dfrac{2a-c-a+2c}{3},\ \dfrac{2b-b+0}{3}\right)$より，G’$\left(\dfrac{a+c}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$

したがって，ＧとG’は一致する。

（高橋による証明）



△ＡＢＣの重心を$G(\vec{g})$，△ＤＥＦの重心をG’（$\vec{g}$’）とする。

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\vec{d}=\frac{-2\vec{a}+\vec{c}}{1-2}=2\vec{a}-\vec{c}\quad,\quad \vec{e}=\frac{-2\vec{b}+\vec{a}}{1-2}=2\vec{b}-\vec{a}\quad,$$

$$\vec{f}=\frac{-2\vec{c}+\vec{b}}{1-2}=2\vec{c}-\vec{b}$$

$$\vec{g}'=\frac{2\vec{a}-\vec{c}+2\vec{b}-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{b}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

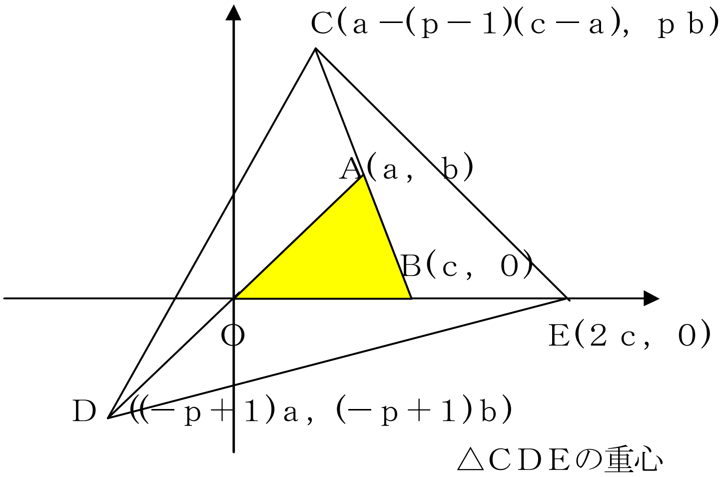
よって，$\vec{g}=\vec{g}'$

§４　一般の三角形を１：ｐに拡大・縮小

三角形を，１：２ではなく，一般的に１：ｐに拡大・縮小したらどうか？

＊一般の三角形について

＜小橋の解答＞



△AOBの重心

$$G\left(\frac{a+c}{3},\frac{b}{3}\right)$$

△ＣＤＥの重心

$$G'\left(\frac{pc+a-(p-1)(c-a)}{3},\frac{pb+(-p+1)b}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{pc+a-pc+pa+c-a-pa+a}{3},\frac{pb-pb+b}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{a+c}{3},\frac{b}{3}\right)$$

よって，ＧとG'は一致する。

＊正三角形になる条件

正三角形は正三角形になる。では，正三角形になるのは，正三角形だけだろうか？

計算が難しいので断念！

§４　面積

１．三角形の場合

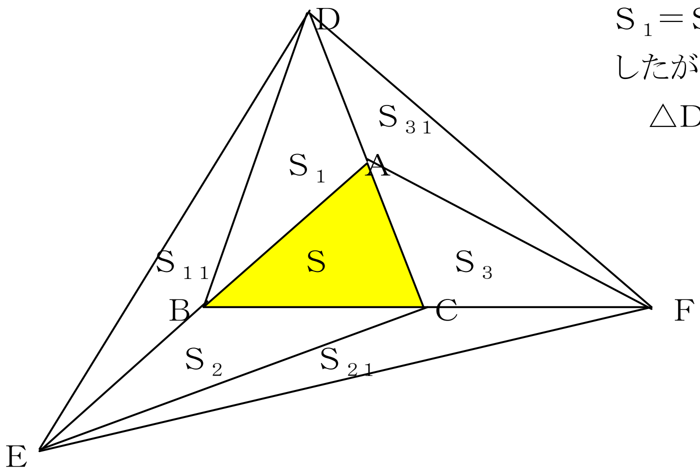
＊一般の三角形

$S_1=S$，$S_2=S$，$S_3=S$

$S_1=S_{11}$，$S_2=S_{21}$，$S_3=S_{31}$

したがって，

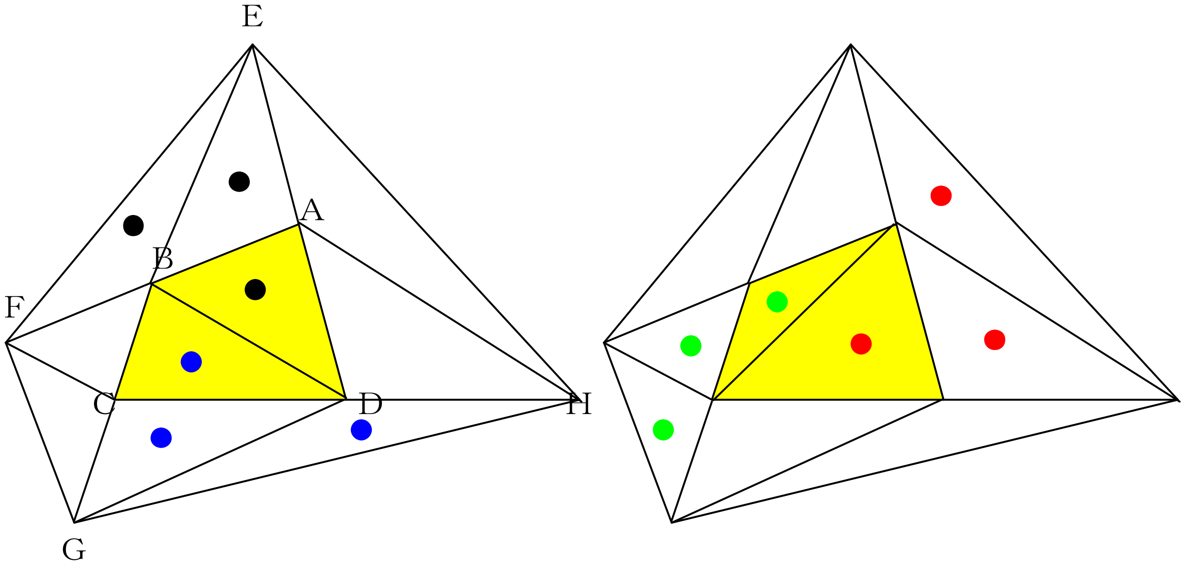
△ＤＥＦ＝△ＡＢＣ×７



２．四角形の場合

＊一般の四角形

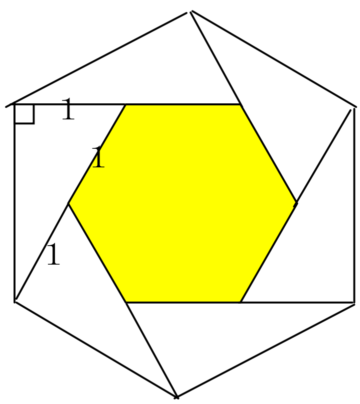
（小橋のアイデア）



●＋●＝●＋●

四角形ＥＦＧＨ＝３(●＋●)＋２（●＋●）＝５(●＋●)＝四角形ＡＢＣＤ×５

３．正６角形



相似比は１：$\sqrt{3}$　より，面積比は１：３

（高橋の予想）

一般のｎ角形について　（ｎ≧３）

ｎ角形	３	４	５	６	７	・・・	無限
面積比	７	５	?	３			１