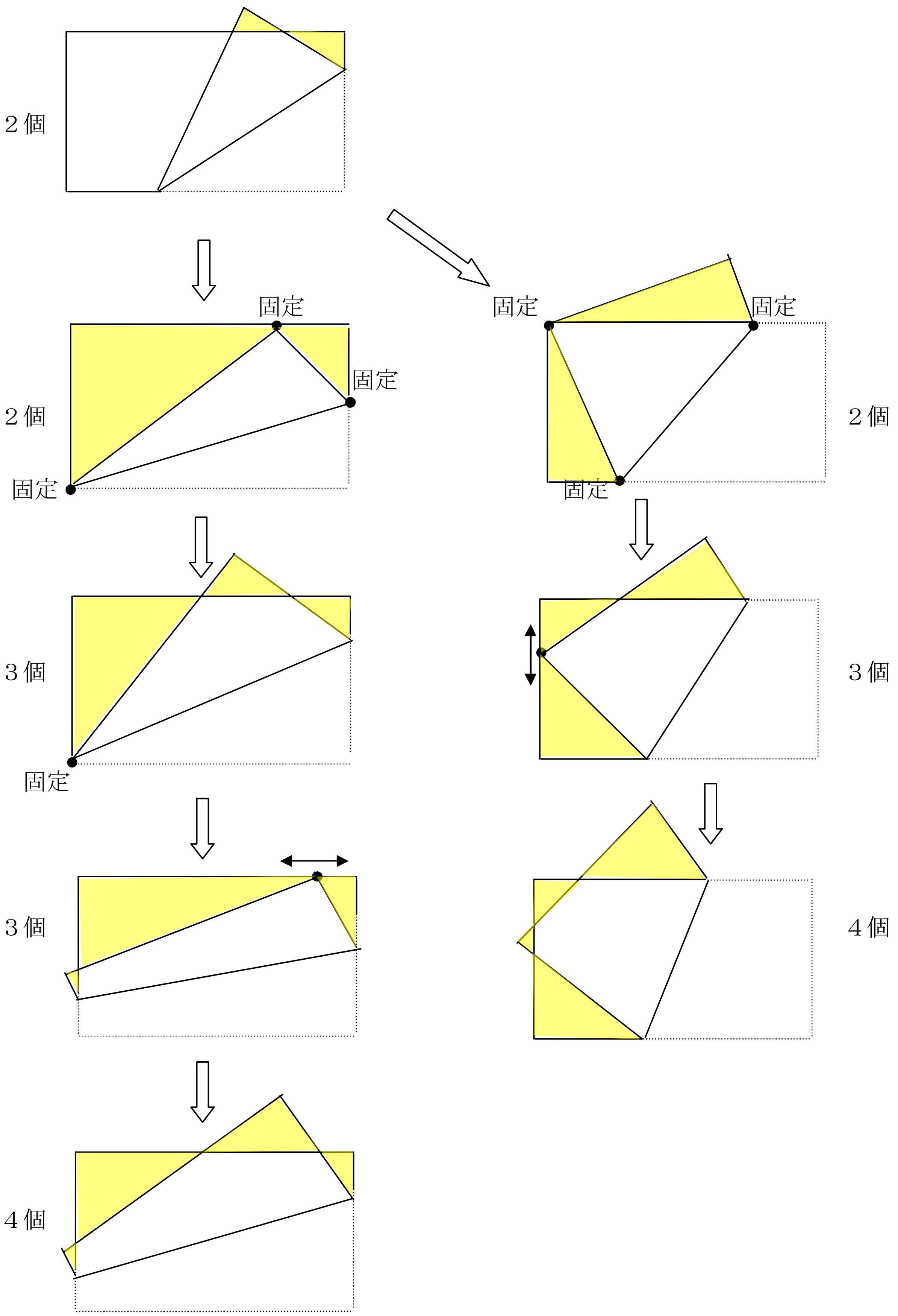
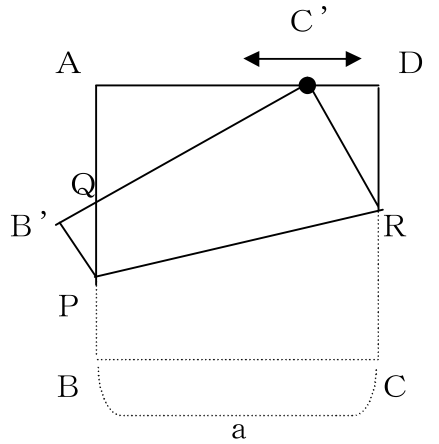
紙を折る

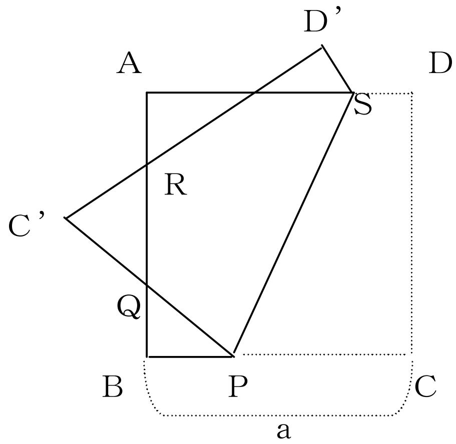
＜問題＞長方形の紙を折る。このとき、相似形はいくつできるだろうか？



＊隣り合う辺を結んで折るとき・・・・最大２個
＊向かい合う辺を結んで折るとき・・・最大４個
＜問題＞
① 固定される場合、その位置はどこか？　そのときの相似比はいくらか？
② 返上を移動する場合、その範囲はどうか？
③ 合同になるときはあるか？　それはどんなときか？
④ 相似比が　１：２：３　のようにきれいな比になることはあるか？　それはどんなときか？
⑤ 頂点が移動するとき、その軌跡はどうであるか？

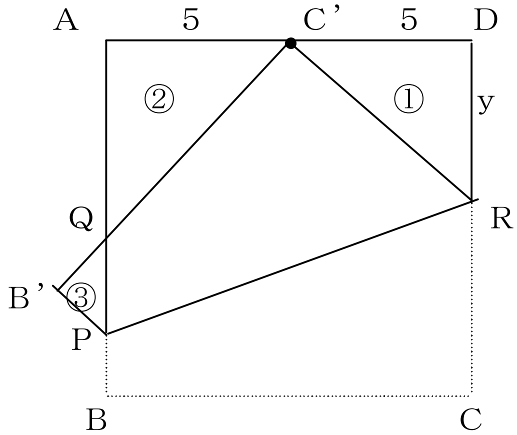
＜正方形＞
長方形では、いろいろな形が考えられてまとめにくいから、まずは正方形で考えよう。
＊正方形では、次の２つの場合しかない。





問題１　C’の動く範囲はどうか？
C’は辺ＡＤ上を動く（ただし、端点は除く）
C’D＝ｘとして、０＜ｘ＜ａ

問題２　①、②、③の面積比はどうか？
ａ＝１０、ｘ＝５で考えよう



＜渡辺の回答＞
$RD=x$とすると、　$C'R=CR=10-x$

$5^2+y^2=(10-y)^2$　　　これを解いて、$y=\dfrac{15}{4}$

よって、$RD=\dfrac{15}{4}$　　$C'R=\dfrac{25}{4}$

①：②$=RD:AC'=\dfrac{15}{4}:5=3:4$

したがって、$AQ=C'D\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{20}{3}$

また、$PQ=5t$、$B'Q=4t$、$B'P=3t$　とおけるから

$QB=PQ+B'P=10-AQ$

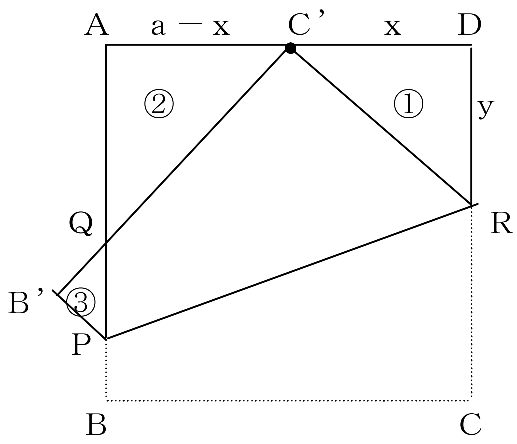
$8t=10-\dfrac{20}{3}$　　　これを解いて、$t=\dfrac{5}{12}$

したがって、$B'P=3\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{4}$

以上より、

①：②：③$=RD:AC':B'P=\dfrac{15}{4}:5:\dfrac{5}{4}=15:20:5=3:4:1$

一般で考えよう



＜渡辺の回答＞
$RD=y$とすると、　$C'R=CR=a-y$

$x^2+y^2=(a-y)^2$　　　これを解いて、$y=\dfrac{a^2-x^2}{2a}$

よって、$RD=\dfrac{a^2-x^2}{2a}$　　$C'R=a-\dfrac{a^2-x^2}{2a}=\dfrac{a^2+x^2}{2a}$

①：②$=RD:AC'=\dfrac{a^2-x^2}{2a}:a-x=a+x:2a$

したがって、$AQ=C'D\times\dfrac{AC'}{RD}=x\times\dfrac{2a}{a+x}=\dfrac{2ax}{a+x}$

また、$C'Q=C'R\times\dfrac{AC'}{RD}=\dfrac{a^2+x^2}{2a}\times\dfrac{2a}{a+x}=\dfrac{a^2+x^2}{a+x}$

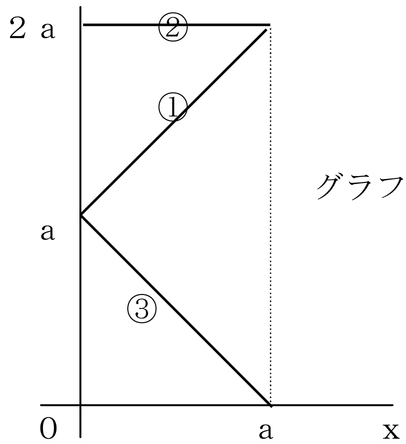
ここで、$B'Q=a-C'Q=a-\dfrac{a^2+x^2}{a+x}=\dfrac{ax-x^2}{a+x}$

したがって、②：③＝$AQ:B'Q=\dfrac{2ax}{a+x}:\dfrac{ax-x^2}{a+x}=2a:a-x$

以上より、①：②：③＝$a+x:2a:a-x$　$(0<x<a)$　である。

＜性質＞

①、②、③の比をグラフに表すと



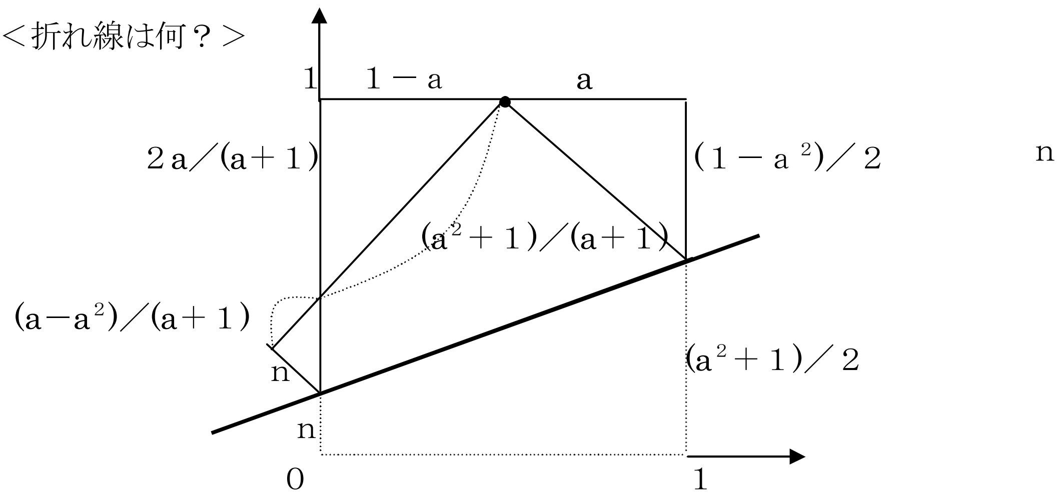
グラフより、面積として、③＜①＜② が成り立つ。

また、相似比として、　①＋③＝②　が成り立つ。

＜藤本＞　文字を使わずに、紙を折る動作だけで ①＋③＝②　を説明できないか？

・・・・それは無理のようだ。

＜折れ線は何？＞



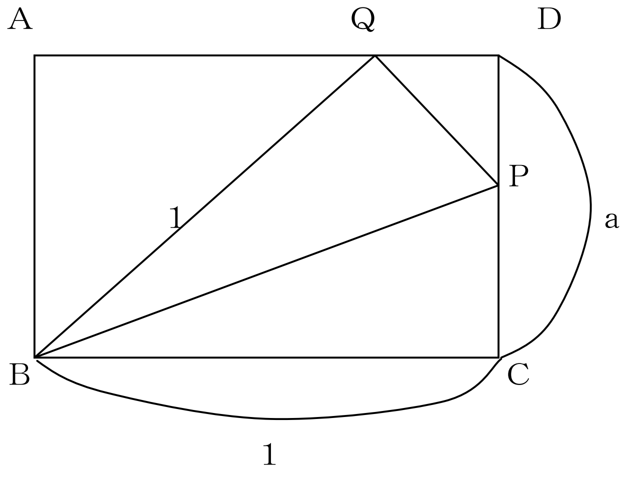
$1-a:2a/(a+1)=n:(a-a^2)/(a+1)$

$n=(1-a)^2/2$

よって

折れ線：$y=ax+(1-a)^2/2$

<長方形>

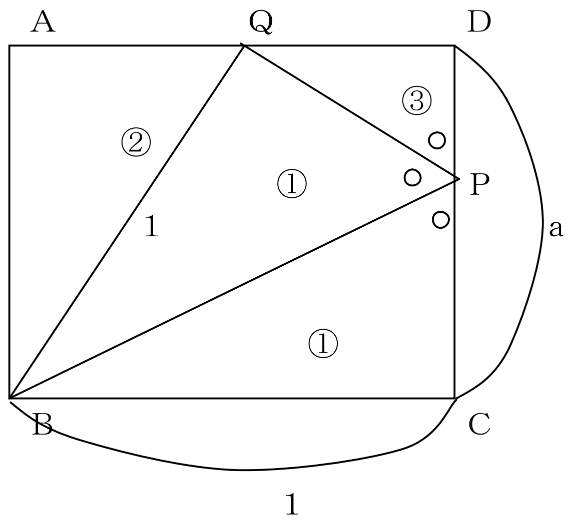


ＡＱ＝$\sqrt{1-a^2}$　　ＱＤ＝１－$\sqrt{1-a^2}$

△ＡＢＱ：△ＤＱＰ＝ＡＢ：ＱＤ＝１：１－$\sqrt{1-a^2}$　ただし、ａ＜１

したがって、△ＡＢＱ＞△ＤＱＰ　（ａ＜１）が成り立つ。

４つの直角三角形がすべて相似となるａはいくらか？



すべてが相似になるのは、

∠ＢＰＣ＝∠ＢＰＱ＝∠ＱＰＤ＝６０°のときである。

よって、ＣＰ＝ＰＱ＝$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$、ＢＰ＝$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

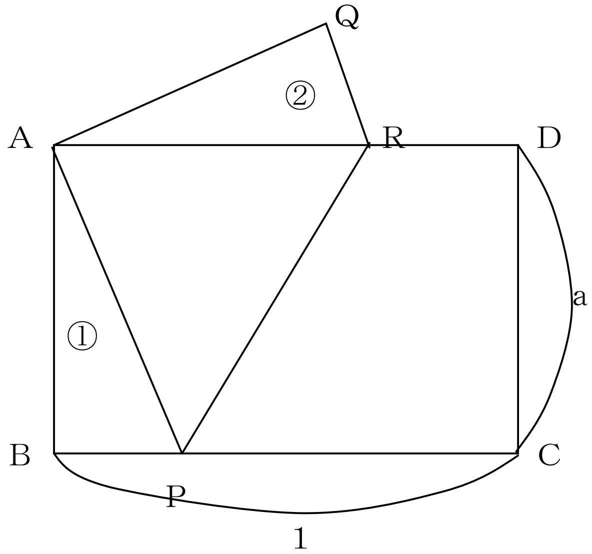
ＡＢ：ＢＣ＝ＢＱ：ＢＰ

ａ：１＝１：$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　したがって、ａ＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき、　①：②：③＝ＢＰ：ＢＱ：ＰＱ

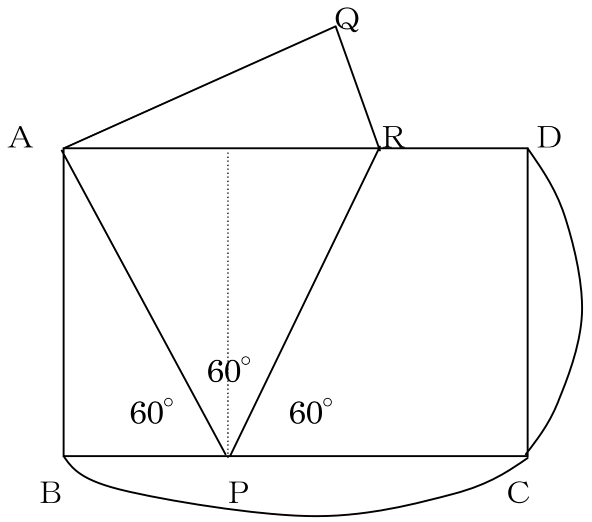
＝$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$：１：$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　である。

また、①、②、③の相似比は、①の３辺の比に等しいことがわかる。

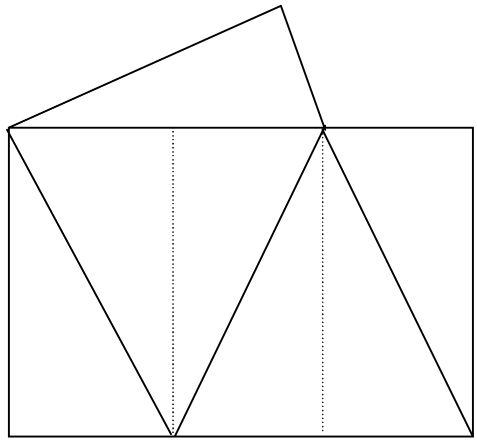


ＡＢ＝ＡＱ（＝ａ）　　よって、①≡②である。
したがって、△ＡＰＲは二等辺三角形である。

△ＡＰＲが正三角形になるのは、ａがいくらのときか？

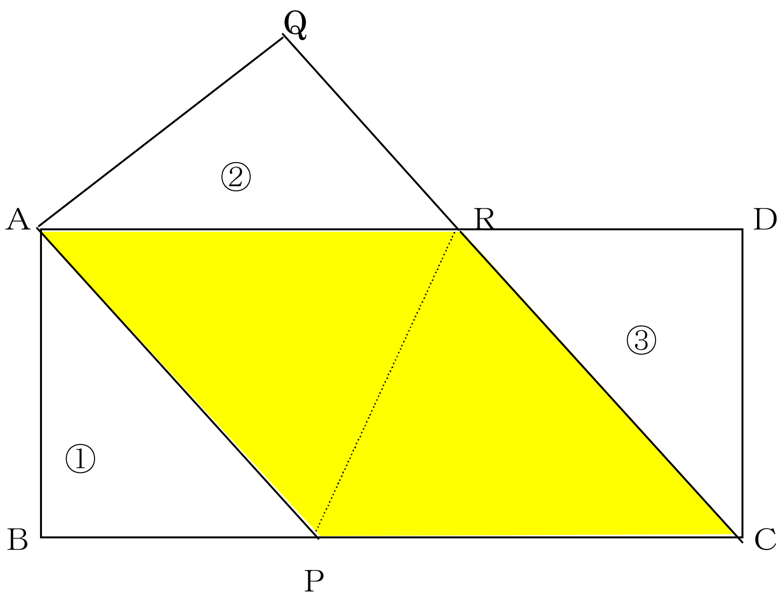


ＢＰ＝ＱＲ＝ＲＤ
ＡＲ＝２ＢＰ
したがって、　１＝ＡＤ＝２ＢＰ＋ＲＤ＝２ＲＤ＋ＲＤ＝３ＲＤ、　ＲＤ＝$\frac{1}{3}$
よって、ＢＰ＝ＲＤ＝$\frac{1}{3}$
すなわち、ａ＝ＡＢ＝$\sqrt{3}$ＢＰ＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$



つまり、ａ＝$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$のとき、上記の７つの直角三角形は、すべて合同である。

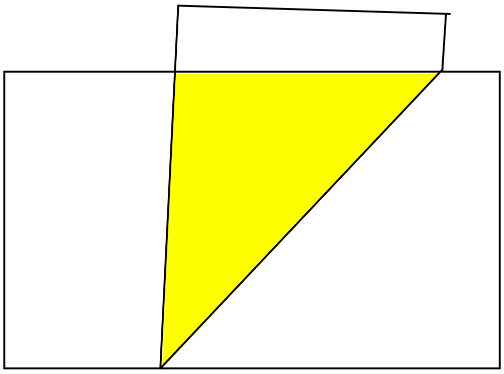
（一般に立ち返ると）



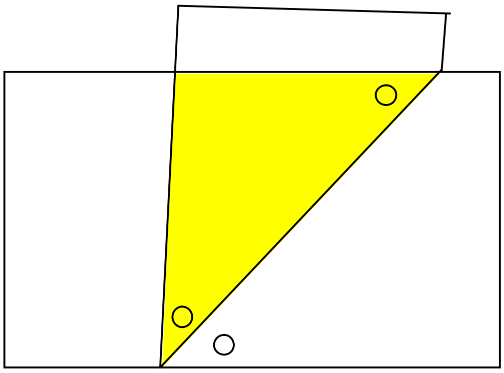
①、②、③は合同である。
ＡＲ＝ＣＲより、四角形ＡＰＣＲはひし形である。

相似三角形を作らない折り方

１．



どんな三角形にすることができるか？

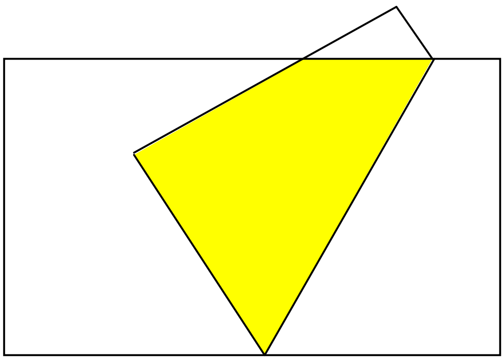


左図より、いつも二等辺三角形である。

○＝60°のとき、正三角形である。

○＝45°のとき、直角二等辺三角形である。

２



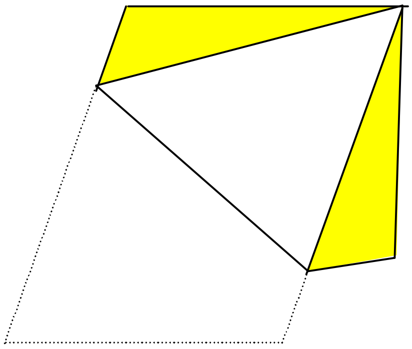
どんな四角形にすることができるか？

＊向かい合う辺は平行とはならないので、平行四辺形の特別なものにはなり得ない。

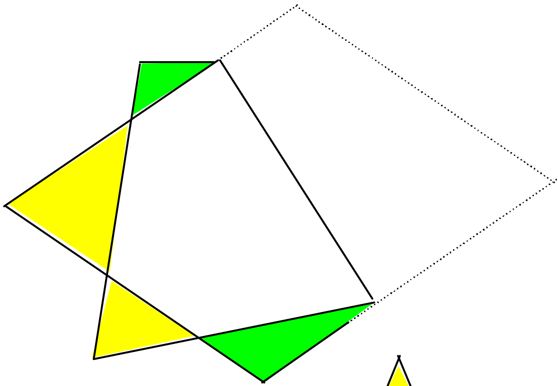
＊たこ形になるとき・・・・もとの長方形の形による。

いろいろな問題

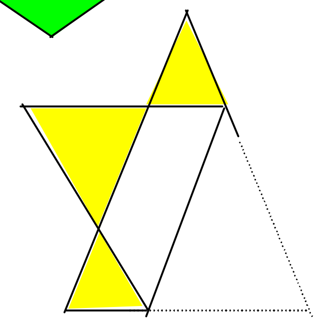
１．渡辺の問題
＊平行四辺形を折るとき
２つの三角形は相似か？



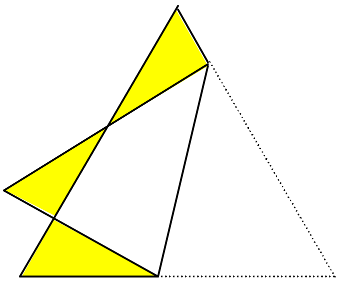
２．藤本の問題
＊平行四辺形を折ると
　相似な三角形が２組できる。



３．泉の問題
＊二等辺三角形を、図のよう平行
　になるように折るとき、３つの
　三角形にはどんな関係があるか？

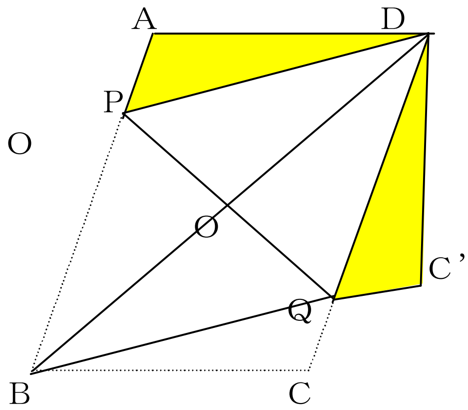


４．対称に折る問題（藤本）
　正三角形
＊正三角形を折ると３つの相似な
　三角形ができる。
＊線対称になる折り方はどうか。



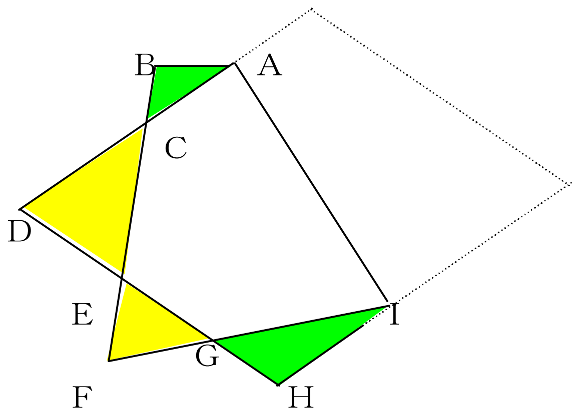
　正方形
＊正方形が線対称になる
　ような折り方はどうか？

<渡辺の問題１に対する解答>



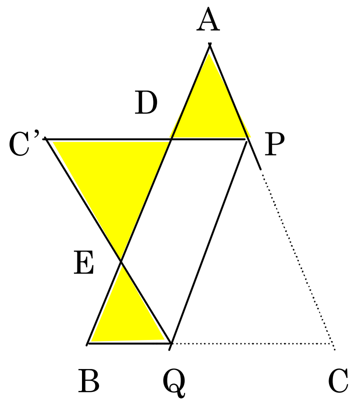
図において、
DはPQに関して点Bと対称な点であるから
点Oは対角線BDの中点である。
したがって、Oは平行四辺形の中心だから、PO＝QO
よって、対角線が互いに他を二等分するので、
四角形PBQDは平行四辺形である。
よって、　PD＝QB・・・①、
∠PDQ＝∠PBQ
∠ADP＝∠ADC－∠PDQ
∠QBC＝∠ABC－∠PBQ
すなわち、∠ADP＝∠QBC・・・②
また、AD＝BC・・・③
①、②、③より、△APD≡△CQB
△CQB≡△C'DQ
よって、△APD≡△C'DQ　である。

<アローナの問題２に対する解答>



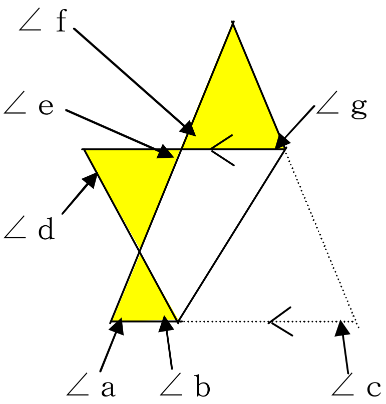
△CDEと△GFEにおいて
∠D＝∠F（平行四辺形の対角）
∠DEC＝∠FEG（対頂角）
ゆえに、△CDE∽△GFE
△ABCと△IHGにおいて
上より、∠DCE＝∠FGE
∠DCE＝∠ACB（対頂角）
∠FGE＝∠IGH
よって、∠ACB＝∠IGH
また、∠B=∠H（平行四辺形の対角）
ゆえに、△ABC∽△IHG

<アローナの問題３に対する誤解>
PQ // AB だから
３つの三角形はみな
△PQC と相似だといえる

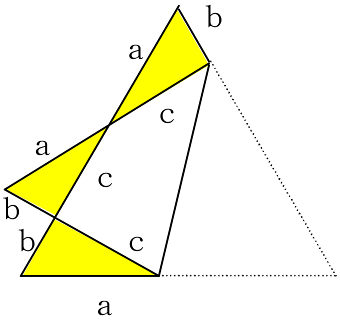


<藤本のアローナへの反論>
PQ // AB とは言えない。
実際、もし PQ // AB だと仮定すると
∠QPC＝∠a、∠PCQ＝∠b とおくと、∠a ≠∠b
△PQCの内角の和より　∠a＋2∠b＝180°　・・・・①
また、∠APC＝2∠a＋∠b＝180°　・・・・・・・・・②
①、②から、∠a＝∠b　これは矛盾である。

＜アローナの問題３に対する解答＞



$\angle a = \angle c$
$\angle a = \angle f$
$\angle c = \angle g$
$\angle f = \angle e$
$\angle c = \angle d$
$\angle d = \angle b$
よって、３つの三角形は相似である。

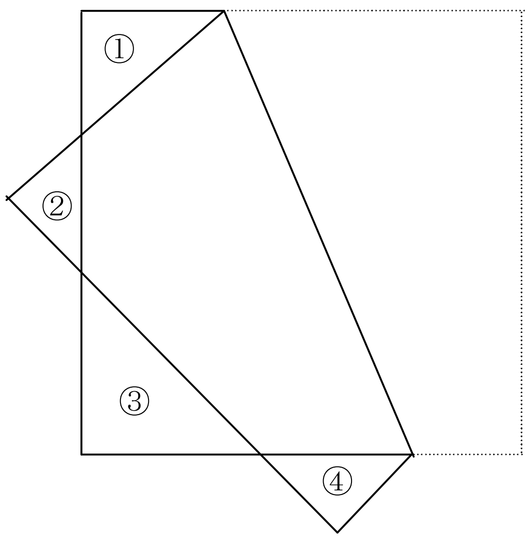


$$a + b + c = 1$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ$$
$$= a^2 + b^2 - ab$$
$$(1 - a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab$$
$$1 + a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2ab = a^2 + b^2 - ab$$
$$1 - 2a - 2b + 3ab = 0$$
$$b(3a - 2) = 2a - 1$$
$$b = \frac{2a - 1}{3a - 2}$$
$$c = 1 - a - b = 1 - a - \frac{2a - 1}{3a - 2} = \frac{3a - 2 - 3a^2 + 2a - 2a + 1}{3a - 2}$$
$$= \frac{3a^2 + 3a - 1}{3a - 2}$$

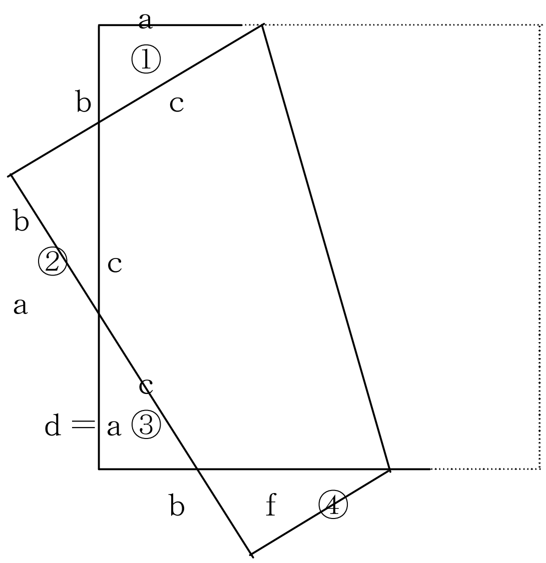
つまり

$$\begin{cases} b = \dfrac{2a - 1}{3a - 2} \\ c = \dfrac{3a^2 + 3a - 1}{3a - 2} \end{cases} \qquad \left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$$

（藤本の予想）①∽②∽③∽④は明らかである。さらに、
①≡②とすると①≡②≡③≡④と成りそうである。



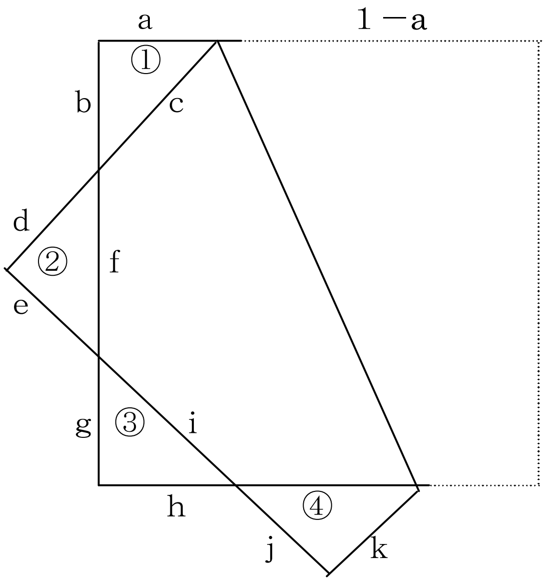
＜証明＞①≡②とすると、



一辺の長さは　ａ＋ｂ＋ｃ　よって、ｄ＝ａ　したがって、②≡③
よって、ｆ＝ｂ　したがって、③≡④である。
つまり、①≡②ならば①≡②≡③≡④である。

（追加予想）対称になるには、②≡③、①≡④で十分であるが、このときも①≡②≡③≡④が言えそうである。証明は不明。

＜Mathematica の利用＞



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d = 1 - a - c$

$d : e = b : a$　　$e = ad / b$

$d : f = b : c$　　$f = cd / b$

$g = 1 - b - f$

$g : h = a : b$　　$h = bg / a$

$g : i = a : c$　　$i = gc / a$

$j = 1 - e - i$

$j : k = b : a$　　$k = aj / b$

$j : \quad = b : c$　　$\quad = jc / b$

Mathematica を利用すると、$h + \quad + k = 1$

②≡③ならば①≡②≡③≡④