荷物を運び出す

＜原題＞

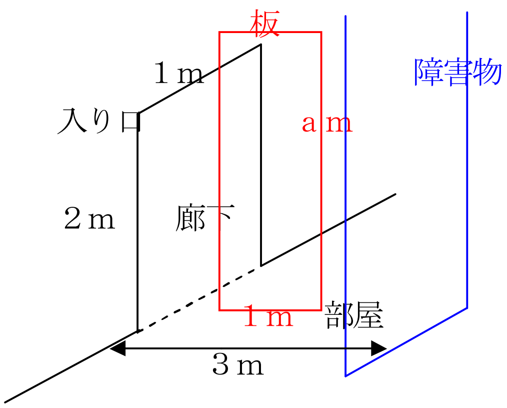
大きな荷物を部屋から廊下に出す。どれだけの大きさの荷物を，入り口から廊下に出すことができるだろうか？

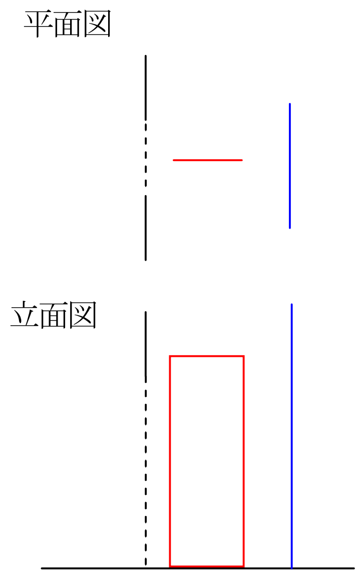
§１　長方形の板を出す

１．入り口から３ｍの所に障害物がある

(1)障害物の高さは無限である。

入り口の高さを２ｍ,
板の幅１ｍ，高さａｍ　　ａの最大値はいくらか？

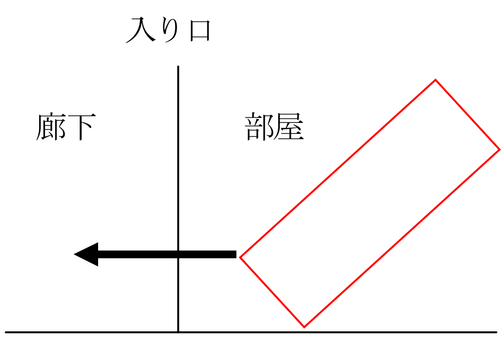


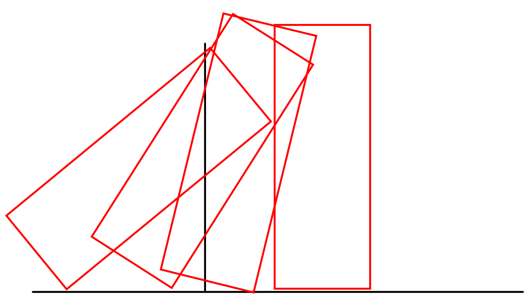


＜藤本の条件設定＞

板の出し方は，次の２つの場面に分ければよいだろう。

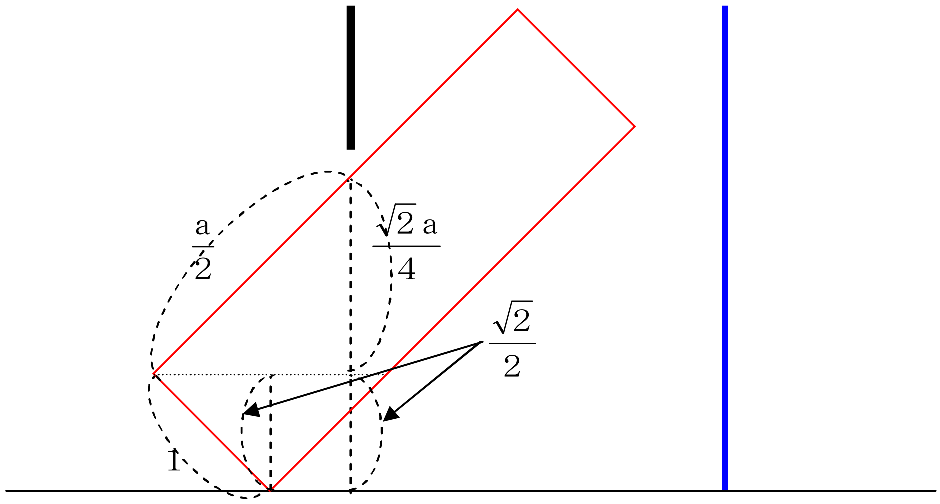
①部屋の中で板を傾け，その後水平に引く　　　②板を傾けながら引き出す





＜確認＞板の出し方は「②板を傾けながら水平に引き出す」ことだけを考えよう。

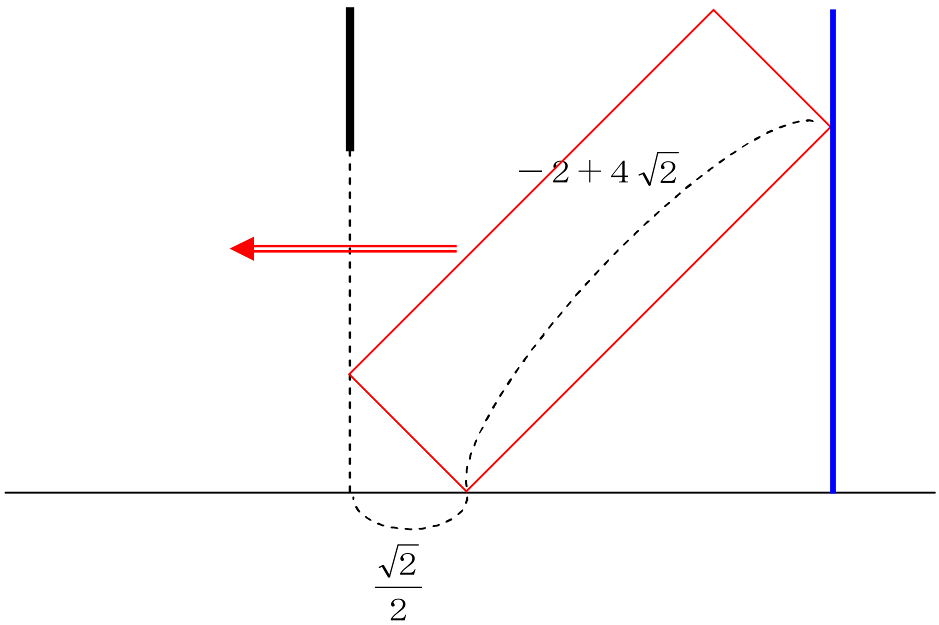
<二宮の予想>板の高さの半分を傾き 45°で廊下に出せれば，全体も出せる。
<山本の解答：板の高さの半分が傾き 45°で廊下に出るときの a の値>



入り口の高さ：　$\frac{\sqrt{2}a}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2$ より

$\frac{\sqrt{2}(a+2)}{4}=2$　　　$a=-2+4\sqrt{2}$

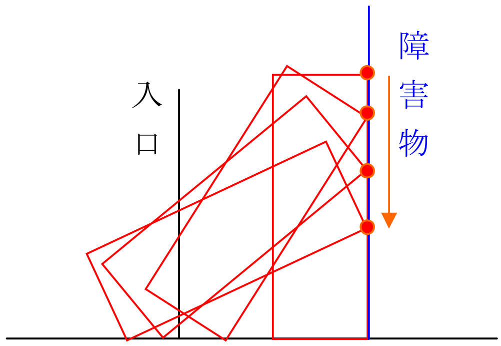
<参考>
４５°傾けてから入り口までそのまま移動すれば可能である。そのためには、入り口と障害物の間に以下の距離が必要となる。



$$\frac{\sqrt{2}}{2}+(-2+4\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-2+4\sqrt{2})=4-\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 3.3\text{m}$$

したがって、この方法ではできない。

（藤本）動きをはっきりさせるために，図のような動きの場合を考えよう。



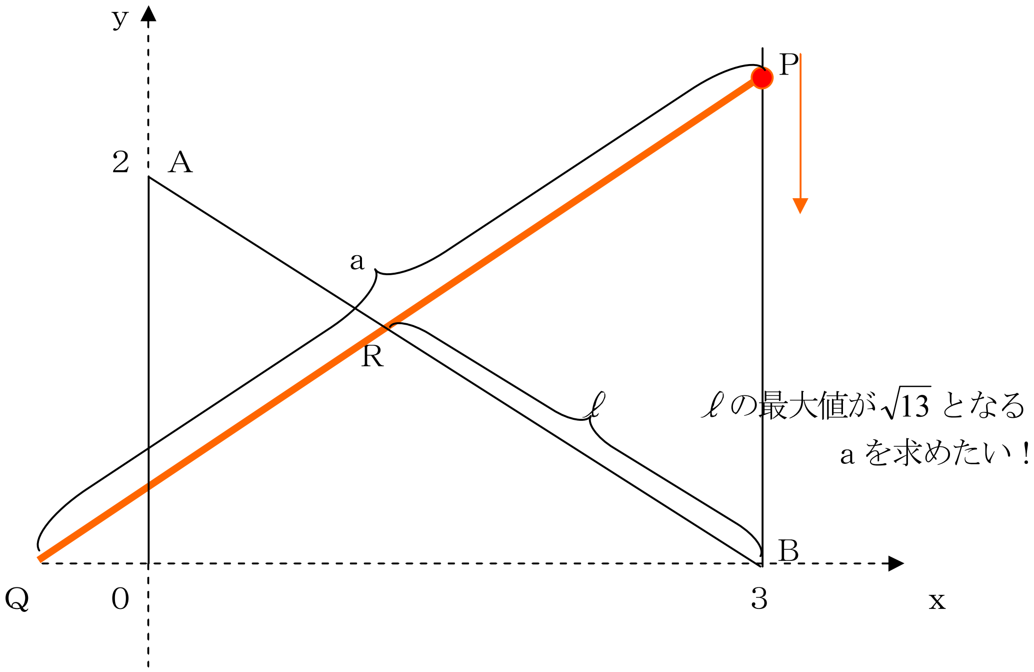
（二宮）これも先と同じく最大値は　$a=-2+4\sqrt{2}$　でしょう。

＊板を通す場合は，計算が難しいので断念！！

§２　長さａｍの棒を通す場合，（障害と入り口の間を３ｍとする）

０．藤本の回り道

　Ｐ（３，　ｔ）（$0 \leqq t \leqq a$），　Ｑ（ｓ，０）　とする。



$a^2=(3-s)^2+t^2$ 、　$(s-3)^2=a^2-t^2$　　$s=\pm\sqrt{a^2-t^2}+3$

ＰＱ：$y=\frac{t}{3-s}(x-3)+t=\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}(x-3)+t$

ＡＢ：$y=-\frac{2}{3}x+2$

ＰＱとＡＢの交点Ｒは

$$--\frac{2}{3}x+2=\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}(x-3)+t$$

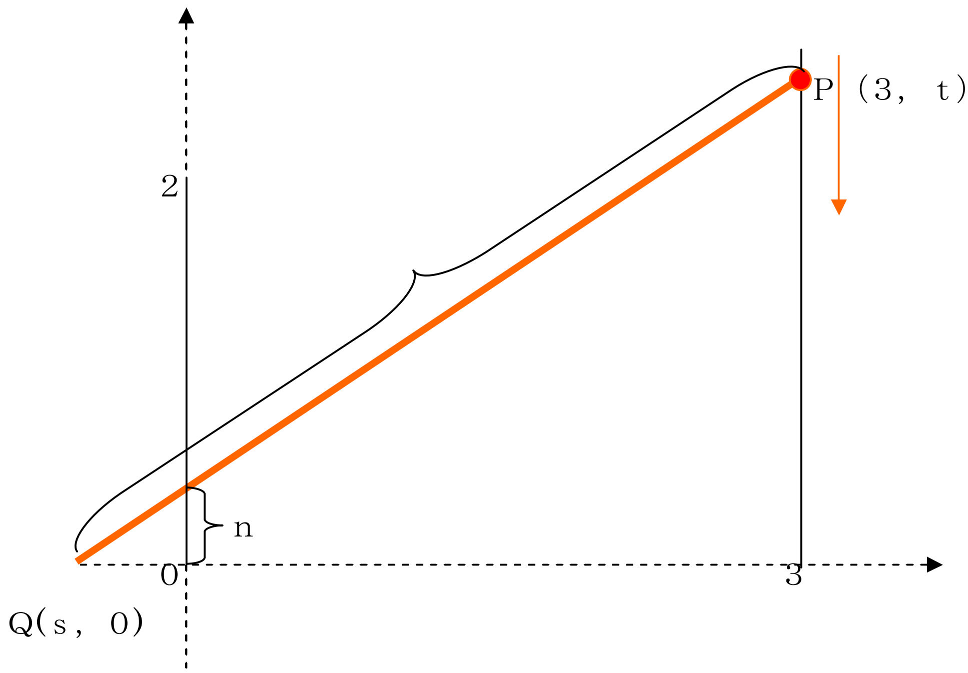
$$--\frac{2}{3}\sqrt{a^2-t^2}\,x+2\sqrt{a^2-t^2}=tx-3t+t\sqrt{a^2-t^2}$$

$$\left(t+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-t^2}\right)x=(2-t)\sqrt{a^2-t^2}+3t$$

$$x=\frac{(2-t)\sqrt{a^2-t^2}+3t}{t+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-t^2}}\qquad y=-\frac{2}{3}\left(\frac{(2-t)\sqrt{a^2-t^2}+3t}{t+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-t^2}}\right)+2\cdots R$$

$$\ell^2=\left(\frac{(2-t)\sqrt{a^2-t^2}+3t}{t+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-t^2}}-3\right)^2+\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{(2-t)\sqrt{a^2-t^2}+3t}{t+\frac{2}{3}\sqrt{a^2-t^2}}\right)+2\right\}^2$$

１．二宮の提案　ℓよりも，入り口での高さｎが最大２ｍになるときを求める方が良い。



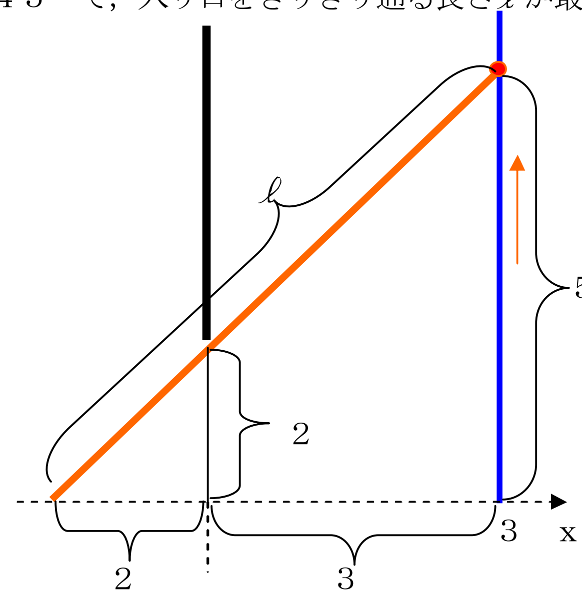
（二宮の解答）

$$PQ：y=\frac{t}{3-s}(x-3)+t=\frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}(x-3)+t$$ 　より

$$n=\frac{-3t}{\sqrt{a^2-t^2}}+t$$ 　　ｎの最大値を求めればよい

（山田の解答）

４５°で，入り口をぎりぎり通る長さℓが最長



$a=5\sqrt{2}$

（藤本の補説）

４５°で，入り口をぎりぎり通る長さ　$a=5\sqrt{2}$のとき，

その位置まで，持ってくることもできるし，それ以降通すこともできる。

もし，ℓより長い棒が通過するとすると，ℓの４５°の地点に来なければならない。このとき，

ℓより長い棒なので，入り口では２ｍより高くなり，通過できない。
つまり，　$a = 5\sqrt{2}$ が最長である。

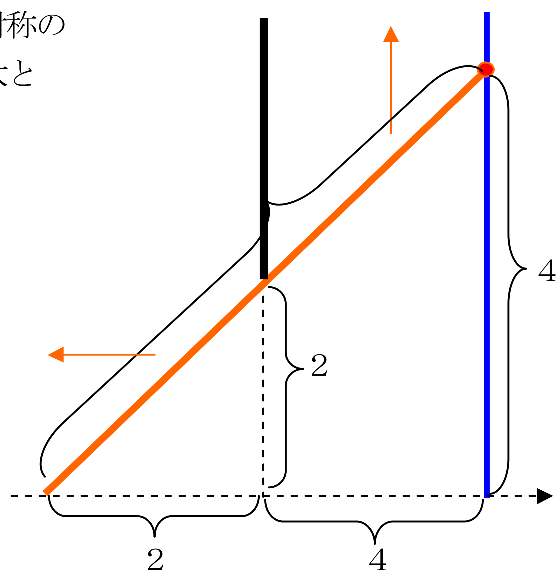
＜予想＞
したがって、$a = 5\sqrt{2}$ とするとき、ｎはｔ＝５において最大値２をとるであろう。

＜表計算による実験＞
$a = \ell = 5\sqrt{2}$ のときのnの変化

t	n
4.0	1.9420169783
4.1	1.9649822734
4.2	1.9850379551
4.3	2.0019180655
4.4	2.0153230674
4.5	2.0249140580
4.6	2.0303057166
4.7	2.0310576413
4.8	2.0266636232
4.9	2.0165382483
5.0	2.0000000000
5.1	1.9762497288
5.2	1.9443429026
5.3	1.9031533940
5.4	1.8513255699
5.5	1.7872099269
5.6	1.7087751413
5.7	1.6134855649

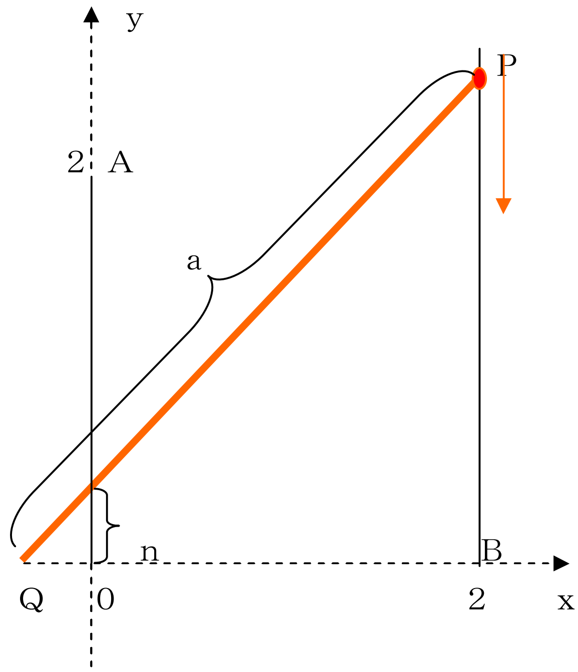
ｔ≒4.7 で最大　　　＊＊ なぜ、予想と違うのか？ ＊＊

＜解釈＞
４５°傾けたとき、入り口の上部が棒の中点であれば、
上へ引っ張りあげるのも、下へずらすのも対称の
動きが可能になるので、４５°のときが最大と
いえるだろう。
そのときは、
　入り口と障害物との距離が２ｍ
　棒の長さが $4\sqrt{2}$ ｍ
のときである。



＜入り口と障害物との間が２ｍの場合を考えてみよう＞

＊長さａｍの棒を通す場合



(解答)

Ｐ（２，ｔ）（$0 \leqq t \leqq a$），　Ｑ（ｓ，０）　とする。

$a^2=(2-s)^2+t^2$　　$(s-2)^2=a^2-t^2$　　$s=-\sqrt{a^2-t^2}+2$

$PQ: y=\dfrac{t}{2-s}(x-2)+t=\dfrac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}(x-2)+t$

$n=\dfrac{2t}{\sqrt{a^2-t^2}}+t$　＝(-3*t)/(a^2-t^2)^(-1/2)+t

$a=4\sqrt{2}$ のとき

$n=\dfrac{2t}{\sqrt{32-t^2}}+t$

＜表計算による実験＞

t	n
3	1.7489135
3.1	1.7897184
3.2	1.8280113
3.3	1.8635192
3.4	1.8959286
3.5	1.9248769
3.6	1.9499427
3.7	1.9706315
3.8	1.9863590
3.9	1.9964282
4	2.0000000
4.1	1.9960522
4.2	1.9833248
4.3	1.9602429
4.4	1.9248066

4.5	1.8744302
4.6	1.8056990
4.7	1.7139916
4.8	1.5928651
4.9	1.4330092
5	1.2203553

確かに、 t＝4で最大値2となっている。
しかし、関数はt＝4で対称となるような単純な関数ではない。

＜MuPad より＞

diff((-3*t)/(a^2-t^2)^(1/2)+t,t)

```
                     2
                  3 t             3
   n'= 1 - ------------ - ------------
                2    2 3/2      2    2 1/2
             (a  - t )       (a  - t )
```

$$=1-\frac{3\ t^2}{(a^2-t^2)\sqrt{a^2-t^2}}-\frac{3}{\sqrt{a^2-t^2}}$$

n’＝0とすると

$$(a^2-t^2)\sqrt{a^2-t^2}-3t^2-3(a^2-t^2)=0$$

$$(a^2-t^2)\sqrt{a^2-t^2}-3a^2=0 \qquad (a^2-t^2)^{\frac{3}{2}}=3a^2$$

$$(a^2-t^2)^3=9a^4$$

solve((a^2-t^2)^3=9*a^4,t)

```
{
{    2        4 1/3 1/2        2        4 1/3 1/2
{  (a  - (9 a )    )   , - (a  - (9 a )    )   ,
{


         2          4 1/3         1/2     4 1/3 1/2
    (16 a  + 8 (9 a )    - 8 I 3    (9 a )    )
  - ---------------------------------------------,
                             4
```

```
      2         4 1/3        1/2     4 1/3 1/2
 (16 a  + 8 (9 a )    - 8 I 3    (9 a )    )
 ---------------------------------------------,
                      4

      2         4 1/3        1/2     4 1/3 1/2
   (16 a  + 8 (9 a )    + 8 I 3    (9 a )    )
 - ---------------------------------------------,
                        4

      2         4 1/3        1/2     4 1/3 1/2 }
 (16 a  + 8 (9 a )    + 8 I 3    (9 a )    )    }
 --------------------------------------------- }
                      4                    }
```

よって，$t=\left(a^2-(9\ a^4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$=(a^2-(9*a^4)^(1/3))^(1/2)

のとき，最大となり,最大値は

＜ＭｕＰａｄより＞

t:=(a^2-(9*a^4)^(1/3))^(1/2):

(-3*t)/(a^2-t^2)^(-1/2)+t

```
        2        4 1/3 1/2         4 1/6   2       4 1/3 1/2
      (a  - (9 a )    )    - 3 (9 a )    (a  - (9 a )    )
```

=(a^2-(9*a^4)^(1/3))^(1/2)-3*(9*a^4)^(1/6)*(a^2-(9*a^4)^(1/3))^(1/2)

これが２であるときのａは

solve((a^2-(9*a^4)^(1/3))^(1/2)-3*(9*a^4)^(1/6)*(a^2-(9*a^4)^(1/3))^(1/2)=2,a)

$a^2-(9\ a^4)^{\frac{1}{3}}=4 \qquad a^2-4=(9\ a^4)^{\frac{1}{3}}$

$(a^2-4)^3=9a^4$

$a^2=t$ とおいて

$(t-4)^3=9t^2$

solve((t-4)^3=9*t^2,t)

よって，ｎ’＝1-3*t^2/(a^2-t^2)^(3/2)-3/(a^2-t^2)^(1/2)＝０

- solve(9*t^4-17*t^2+9-a^2=0,t);

```
{    1/2       2      1/2      1/2   1/2       2      1/2      1/2
{   2    ((36 a  - 35)    + 17)     2    ((36 a  - 35)    + 17)
{ - ------------------------------, ------------------------------,
{                6                            6

    1/2           2      1/2 1/2   1/2           2      1/2 1/2 }
   2    (17 - (36 a  - 35)   )     2    (17 - (36 a  - 35)   )    }
 - ------------------------------, ------------------------------ }
                6                            6             }
```

- solve(-2^(1/2)*((36*a^2-35)^(1/2)+17)^(1/2)=12,a);

```
{}
```

- solve(2^(1/2)*((36*a^2-35)^(1/2)+17)^(1/2)=12,a);

```
  1/2      1/2
{85   , - 85   }
```

- solve(-2^(1/2)*(-(36*a^2-35)^(1/2)+17)^(1/2)=12,a);

```
{}
```

- solve(2^(1/2)*(-(36*a^2-35)^(1/2)+17)^(1/2)=12,a);