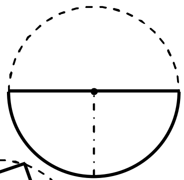
ピザの盛り付け

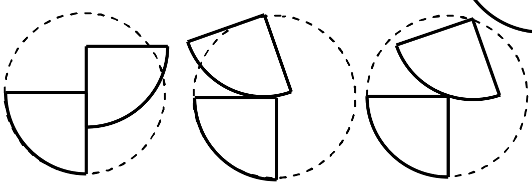
数学の探究活動の一例として、大学の本年度のゼミで行ったものを紹介したい。Ａ～Ｇがゼミ参加者の発言で、次の原題をもとに、探求を進めていった。

＜原題＞半径 20cm の半円形のピザを 2 つに切り分け、円形の皿に盛る。ピザは重ならないよう、また、皿からはみ出さないようにするとき、皿の半径は最小いくらにできるか？

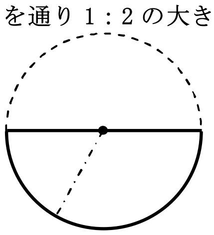
１．ピザを中心を通り 2 等分した場合

＜Ａさんの解答＞
2 つのピザをどう並べても、半径 20cm の皿よりも小さくすることはできない。



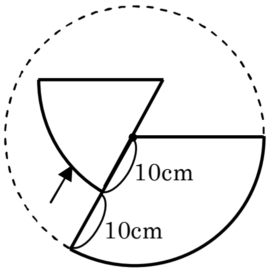


２．中心を通り 1：2 の大きさに切り分けた場合

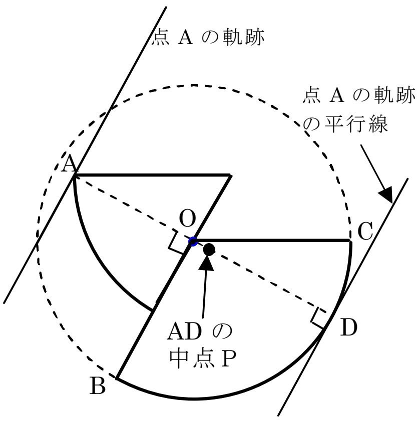


(1)小さいほうをスライドさせたとき

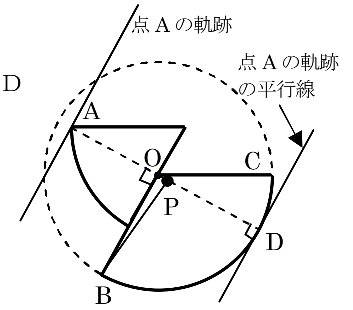
①例として 10cm だけスライドさせたとき



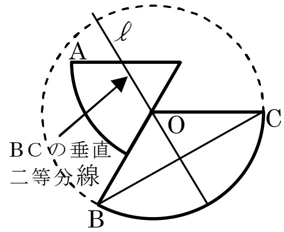
＜Ｂさんの解答＞
点Ａを通ってはさみ込む平行線（下図の 2 本の平行線）が最小の円を作るだろう。つまり、ＡＯと孤ＣＢの交点をＤとするとき、ＡＤの中点Ｐが中心になる。



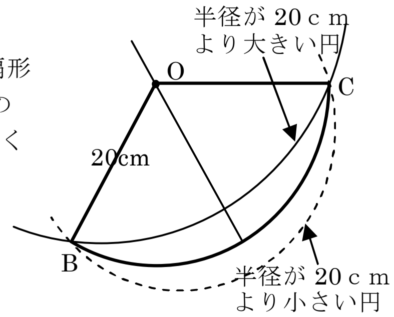
＜Ａさんの反論＞
ＰＢ＞ＯＢ＝ＯＤ＞ＰＤ
より
ＰＢ＞ＰＤ(皿の半径)
よって、
点Ｂは皿の外になる



＜Ｂさんのアイデア＞
円の中心はＢＣの垂直二等分線(ℓ)上にあるだろう。
＜Ｂのアイデア＞
2 点Ｂ、Ｃを通り、半径が 20cm より小さい円では、この扇型ＯＢＣ全体を含むことはできない。したがって、半径 20cm より小さい円は存在しない。



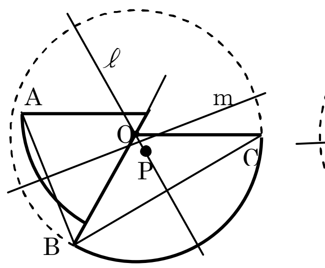
＜Ｃさんの反論＞
2 点Ｂ、Ｃを通り、扇形ＯＢＣ全体を含む円の半径は 20cm より小さくなくてはならない。

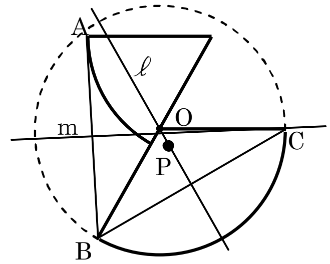


注意：この性質は勘違いを起こしやすいことなので、問題にすれば面白い。

②円の半径が最小になるのはどれだけスライドさせたときか

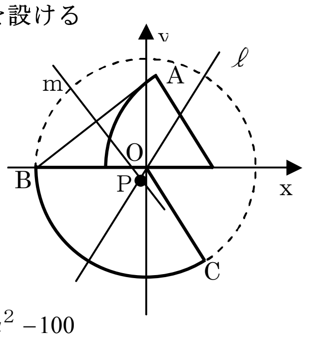
＜Ｄさんの予想＞（作図から）
スライドが 10cm より小さいとき（下左図）も、10cm より大きいとき（下右図）も、中心はＯとＰ（10cm スライドさせたときの中心）の間に来る。したがって、10cm スライドしたときに円の半径は最小になるだろう。





＊ＯＢをｘ軸として座標を設ける

Ａ(a、$10\sqrt{3}$)とおく。



＜Ｄさんの解答＞

ℓは　$y=\sqrt{3}\,x$

＜Ｅさんの解答＞

ｍは　$y=-\dfrac{a+20}{10\sqrt{3}}x+\dfrac{a^2-100}{20\sqrt{3}}$

＜Ｄさんの解答＞　交点Ｐは、$-10\leqq a\leqq 10$ として

$$P\left(\frac{a^2-100}{2(a+50)}、\frac{\sqrt{3}(a^2-100)}{2(a+50)}\right)$$

＜目標＞中心Ｐは直線ℓ上を動き、円は点Ｂを通るから、点Ｐのｘ座標が小さいほど半径は小さくなる。よって、

$\dfrac{a^2-100}{2(a+50)}$ を最小にする a を求めればよい。

＜Ｅさんの解答＞

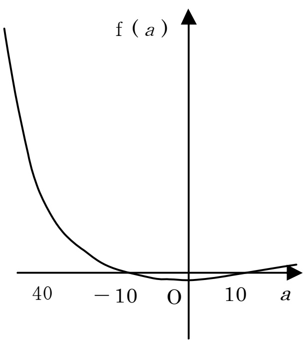
$$f(a)=\frac{a^2-100}{2(a+50)}=\frac{1}{2}\left(a-50+\frac{2400}{a+50}\right)$$

$$f'(a)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2400}{(a+50)^2}\right)$$

$f'(a)=0$ を解いて

$a=20\sqrt{6}-50≒-1.01$

a	…	$20\sqrt{6}-50$	…
f'	−	0	＋
f		最小値	



$a=20\sqrt{6}-50$ のとき、　中心Ｐのｘ座標は

$$x=\frac{1}{2}\left((20\sqrt{6}-50)50+\frac{2400}{(20\sqrt{6}\ 50)+50}\right)$$

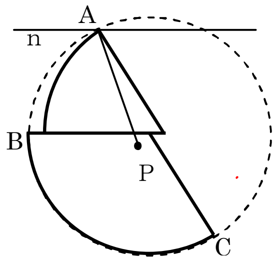
$$=20\sqrt{6}-50$$

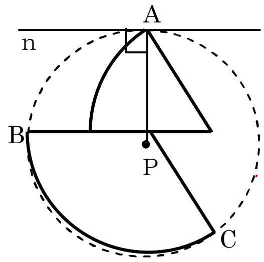
よって、このとき、直線ＡＰはｙ軸に平行である。

③作図を考える

点Ａの軌跡、つまり点Ａが乗る直線をｎとする。

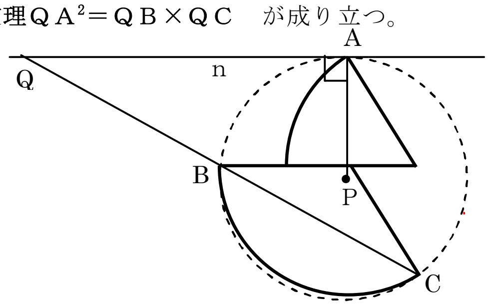
円が点Ａを通り、直線ｎに交差するとき(次の左図)は、大きさとしてはロスであろう。よって、円が直線ｎに接するとき(次の右図)、円は最小となる。＜証明はゼミ終了後に判明（３．補遺　参照）＞





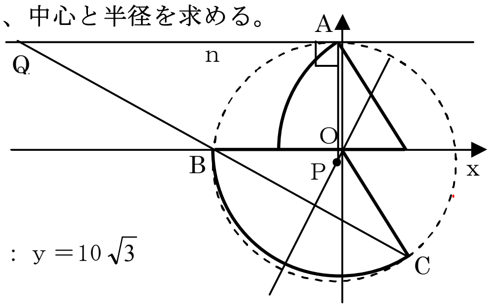
したがって、求める円は直線ｎに接し（接点が点Ａ)、２点Ｂ、Ｃを通る円である。

このとき、直線ＢＣと直線ｎの交点をＱとして、**方冪の定理$QA^2=QB\times QC$**　が成り立つ。



つまり、$QA^2=QB\times QC$　を満たす点として、点Ａを作図することができる。

＊次に、中心と半径を求める。



直線ｎ：$y=10\sqrt{3}$

$$BC:\ y=\frac{-10\sqrt{3}-0}{10-(-20)}(x+20)=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+20)$$

$$10\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+20)\ より、$$

$$x=-10\sqrt{3}\times\frac{3}{\sqrt{3}}-20=-30-20=-50$$

よって、Ｑ(-50、$10\sqrt{3}$)

ｘ座標を比べれば**ＱＣ＝２ＱＢ**であることがわかる。

$QB=\sqrt{30^2+\left(10\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1200}=20\sqrt{3}$

$QC=40\sqrt{3}$

$QA^2=20\sqrt{3}\times 40\sqrt{3}=2400$、　$QA=20\sqrt{6}$

したがって、点Ａのｘ座標は $20\sqrt{6}-50$

よって、Ａ($20\sqrt{6}-50$、$10\sqrt{3}$)

ℓ：y＝$\sqrt{3}$ x より

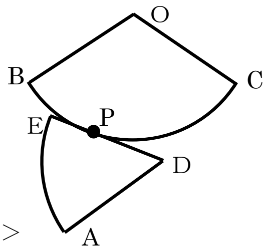
x＝20$\sqrt{6}$ −50 を代入して　y＝60$\sqrt{2}$ −50$\sqrt{3}$

半径は　10$\sqrt{3}$ −(60$\sqrt{2}$ −50$\sqrt{3}$)＝60($\sqrt{3}$ − $\sqrt{2}$)

したがって、中心Ｐ(20$\sqrt{6}$ −50、60$\sqrt{2}$ −50$\sqrt{3}$)、

半径 60($\sqrt{3}$ − $\sqrt{2}$)　$\boxed{(≒19.08)}$

(2)　大きい片の弧に小さい片の１辺が接する場合

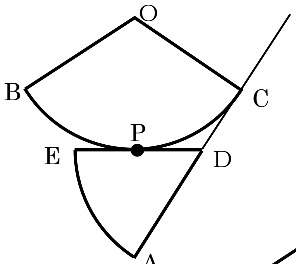


＜Ｆさんの予想＞

ア.接点が弧と辺の両方の中点の時に最小になるだろう。

イ．このとき、辺ＡＤの延長は弧の端Ｃを通るだろう。

①接点Ｐが弧ＢＣ、辺ＥＤの中点であるとき



＜Ａさんの反論＞

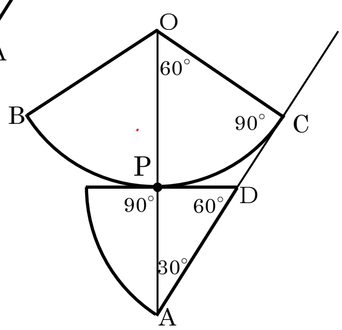
イが正しいと仮定すると、

△ＡＰＤと△ＡＣＯはともに 90°、30°、60°の直角三角形で相似である。

しかし、

ＣＯ＝20

ＡＯ＝ＡＰ＋ＰＯ＝10$\sqrt{3}$ ＋20



だからＣＯ：ＡＯ＝20：10$\sqrt{3}$ ＋20＝1：$\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$

ＤＰ：ＡＰ＝1：$\sqrt{3}$

よって、ＣＯ：ＡＯ≠ＤＰ：ＡＰ

したがって、相似にならないから、イの意見は誤りである。

＜Ｃさんの意見＞

ＡＯの中点が皿の円の中心で、その半径は

ＡＯ÷2＝5$\sqrt{3}$ ＋10（≒18.7）である。

＜Ｂさんの反論＞

ＡＯの中点をＱとおく。

ＡＤの延長とＯＣの交点をＳとすると、ＯＳ＜ＯＣ

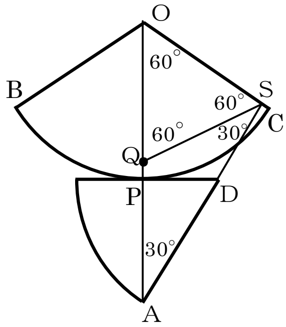
よって、ＱＳ＜ＱＣ

△ＡＳＯは直角三角形になり

△ＯＱＳは正三角形だから

ＱＯ＝ＱＳ

よって、ＱＯ＜ＱＣ



したがって、Ｑを中心とする円から、Ｃははみ出る。

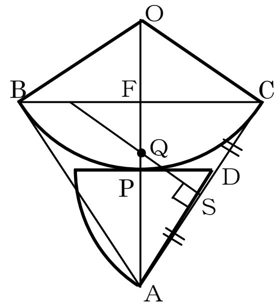
＜Ｆさんの解答＞

△ＡＢＣの外接円の中心をＱ、ＡＣ、ＢＣの中点をＳ、Ｆとおく。

△ＡＣＦ∽△ＡＱＳである。

ＡＦ＝10＋10$\sqrt{3}$、

ＣＦ＝10$\sqrt{3}$



ＡＣ＝$\sqrt{(10+10\sqrt{3})^2+(10\sqrt{3})^2}$ ＝$\sqrt{700+200\sqrt{3}}$

よって、ＡＱ：ＡＳ＝ＡＣ：ＡＦ

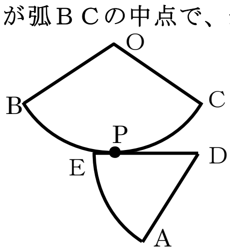
ＡＱ＝$\dfrac{\sqrt{700+200\sqrt{3}}}{2}$ × $\sqrt{700+200\sqrt{3}}$

÷(10＋10$\sqrt{3}$)＝$\dfrac{25\sqrt{3}-5}{2}$ ≒19.15

＊△ＡＢＣの外心Ｑが求める円の中心で、

半径は $\dfrac{25\sqrt{3}-5}{2}$ 　(≒19.15) である

②接点Ｐが弧ＢＣの中点で、辺ＤＥ上を動くとき

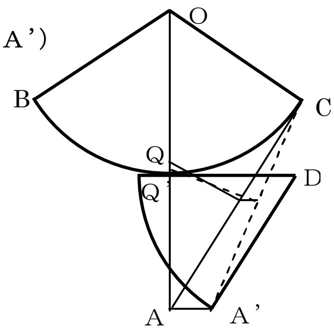


＜Ａさんの解答＞

＊Ａが右へ動いたとき（Ａ’）

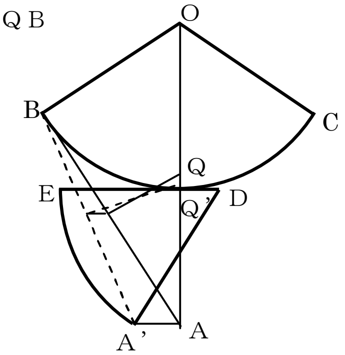
Ａ’ＣはＡＣより傾きが急になるため、Ａ’Ｃの中点を通る垂線から求まる外心Ｑ’は先の外心Ｑより下に来る。

よって、Ｑ’Ｃ＞ＱＣ



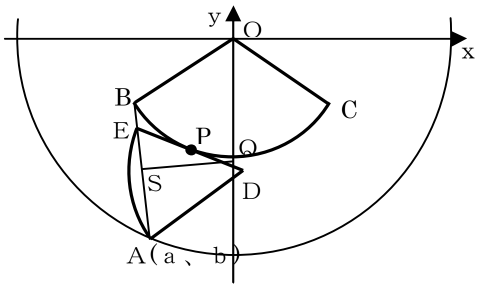
＊Aが左へ動いたとき（A’）

A’ BはABより傾きが急になるため、A’ Bの中点を通る垂線から求まる外心Q’は先の外心Qより下に来る。
よって、Q’ B＞QB



以上より、点PがED上を動くときは、EDの中点において求める円の中心は最小になる。
つまり、先のFの予想のアのとき、皿の半径は最小 **（約 19.15）** である。

③接点Pが弧BC上を動き、辺DEの中点であるとき



＜Gさんの解答＞　上の座標を設けて、A (a、b)、△ABCの外心をQ、ABの中点をSとすると

$a^2+b^2=(20+10\sqrt{3})^2$　より　$a^2=(20+10\sqrt{3})^2-b^2$

B（$-10\sqrt{3}$ 、-10）、　S $\left(\dfrac{a-10\sqrt{3}}{2}、\dfrac{b-10}{2}\right)$ より

SQ：$y=-\dfrac{a+10\sqrt{3}}{b+10}\left(x-\dfrac{a-10\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{b-10}{2}$

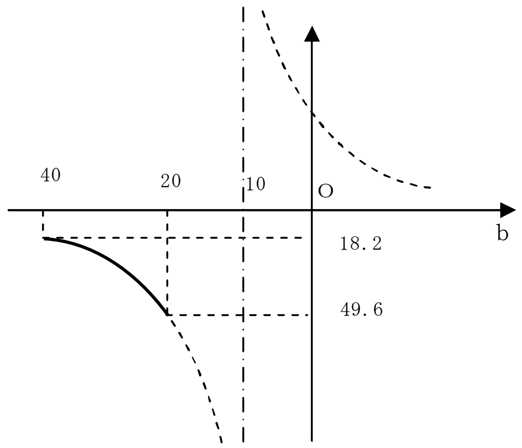
x＝0 のとき　$y=\dfrac{a^2-(10\sqrt{3})^2}{2(b+10)}+\dfrac{b-10}{2}$

$=\dfrac{150+200\sqrt{3}}{b+10}$　($b\leqq-20-10\sqrt{3}$)

$b=-20-10\sqrt{3}$ のとき、$y=-\dfrac{45-5\sqrt{3}}{2}$　より

Q（0、q）とおくと

$q\leqq-\dfrac{45-5\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq-18.2$



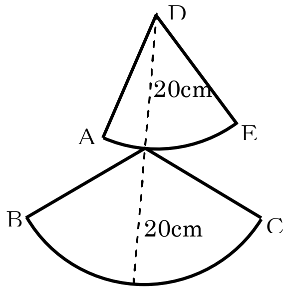
$OQ=-\dfrac{45-5\sqrt{3}}{2}$　（≒－18.2）

$QA=20+10\sqrt{3}-\dfrac{45-5\sqrt{3}}{2}=\dfrac{25\sqrt{3}-5}{2}$　（≒19.15）

つまり、点Aがy軸上にあるとき、△ABCの外接円は最小になり、このとき、点Oもこの外接円に含まれる。
このときの外接円の半径は **約 19.15** である。

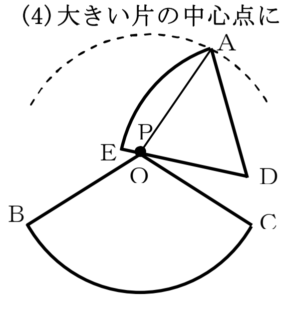
注：ここでは、接点Pが弧BCか辺DEのどちらかの中点である場合に限定した。その他の場合の分析は高校数学の範囲外となる。

(3) 大きい片の中心点に小さい片の弧が接する場合



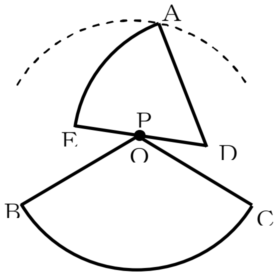
図より、明らかに 最小の円の半径は **20cm** である

(4) 大きい片の中心点に小さい片の辺が接する場合

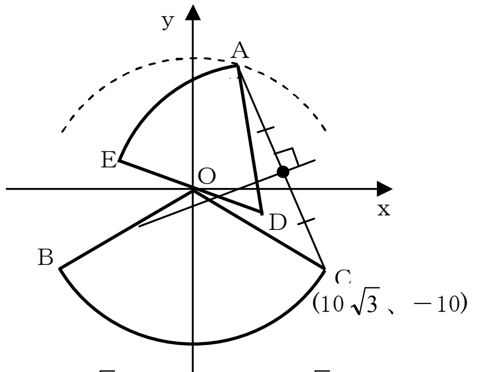


接点が図のPであると、点Aは、O中心、半径AOの円を描く。

したがって、点PがDEの中点のとき、求める円の半径はもっとも小さくなる。



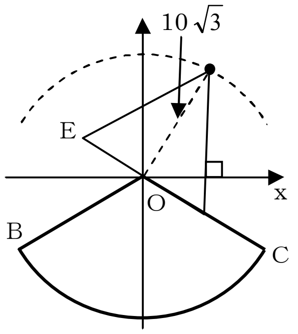
このとき、△ABCの外接円の中心を求める。
x軸　BC、y軸⊥BCと、x軸、y軸を定めると、



$a^2+b^2=(10\sqrt{3})^2$　（$15 \leqq b \leqq 10\sqrt{3}$）

bの最大値は$10\sqrt{3}$

bの最小値は右図より



$10\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15$

中点$\left(\dfrac{a+10\sqrt{3}}{2}、\dfrac{b-10}{2}\right)$

$$y = -\frac{a-10\sqrt{3}}{b+10}\left(x - \frac{a+10\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{b-10}{2}$$

x＝0のとき

$$y = \frac{a^2-300}{2(b+10)} + \frac{b-10}{2} = -\frac{50}{b+10}$$

よって、(半径)$=10\sqrt{3} + \dfrac{50}{b+10}$　　（$15 \leqq b \leqq 10\sqrt{3}$）

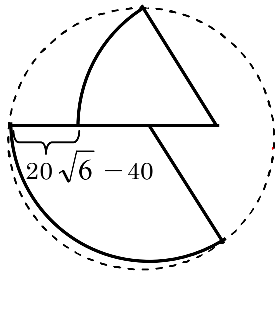
$b=10\sqrt{3}$のとき、　半径は最小となるから

(半径の最小値)$=10\sqrt{3} + \dfrac{50}{10\sqrt{3}+10}$

$$= \frac{25\sqrt{3}-5}{2} \quad \boxed{(\fallingdotseq 19.15)}$$

＜結論＞

以上のことから、右図のとき、

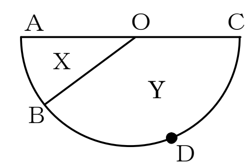
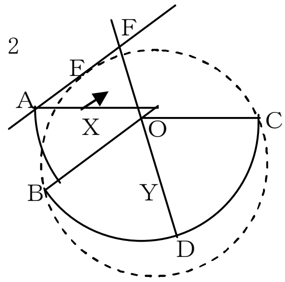


皿の半径は最小、つまり、　$60(\sqrt{3}-\sqrt{2})$cm

（約19.08cm）　となる。

３．補遺

２．(１)③の最初の予想では、半円を２：１に分けるという条件があったが、より一般的に、この予想を証明することができる。このことを以下のように、問題の形にしてみた。

> 半円Oを図１のように、２つの部分XとYに分け、Xの１つの頂点をA、Yの頂点をO、B、Cとし、弧BCの中点をDとする。Xを辺OBに沿って図２のように平行移動させ、点Aの軌跡の直線をℓ、２点BとCを通る円と直線ℓとの接点をE 、直線ODと直線ℓの交点をFとする。
>
> ①　BC＝a、直線ℓと直線BCの交点をGとしてEGをaで表せ。
>
> ②　△EBCの外接円の中心をPとすると、Pは線分OF上にはないことを証明せよ。
>
> ③　Xを頂点AがEに重なるまで平行移動させるとき、△ABCの外接円は△EBCの外接円よりも大きいことを証明せよ。
>
> 図１
>
> 
>
>
> 図２
>
> 
>

＜証明＞

①　接弦定理より、
　$GE^2 = GB \times GC = a \times 2a = 2a^2$

　よって　$GE = \sqrt{2}\,a$

②　Pは線分DF上にある。
　Pが線分OF上にあると仮定する。
　　外接円より　PE＝PB・・・(ア)
　PE＜OB、PB＞OB
　　よって、PE＜PB・・・(イ)
　(ア)、(イ)は矛盾するので、Pは線分OF上にはない。

③　△ABCの中心をQとする。
　Qが線分PD上にあると仮定すると、
　　　QA＞PE＝PB
　また、PB＞QB　　　よってQA＞QB
　　　　　　　　　　　QA＝QB
　これは矛盾　よって、Qは線分PF上にある。
　　よって、QB＞PB