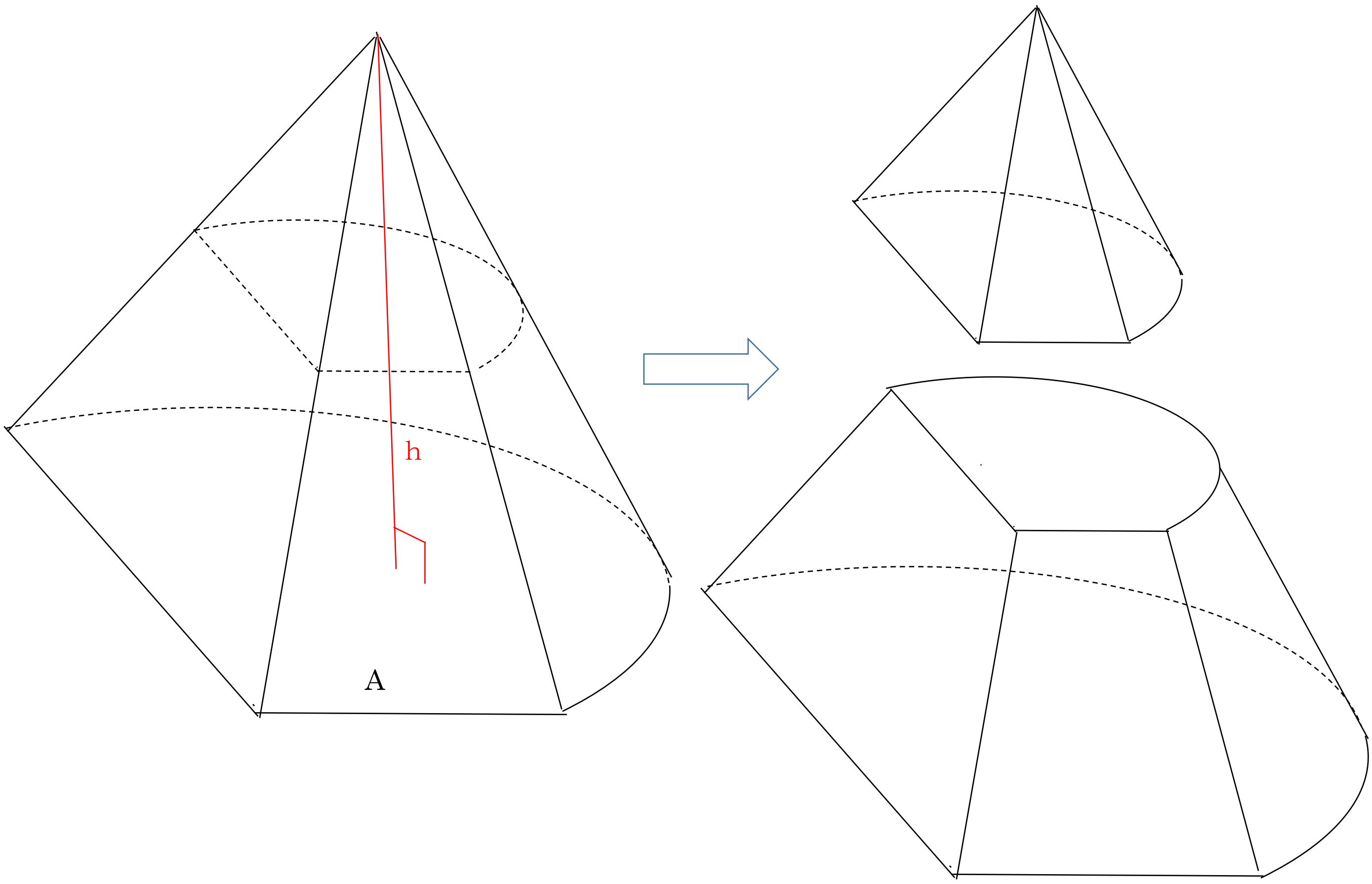
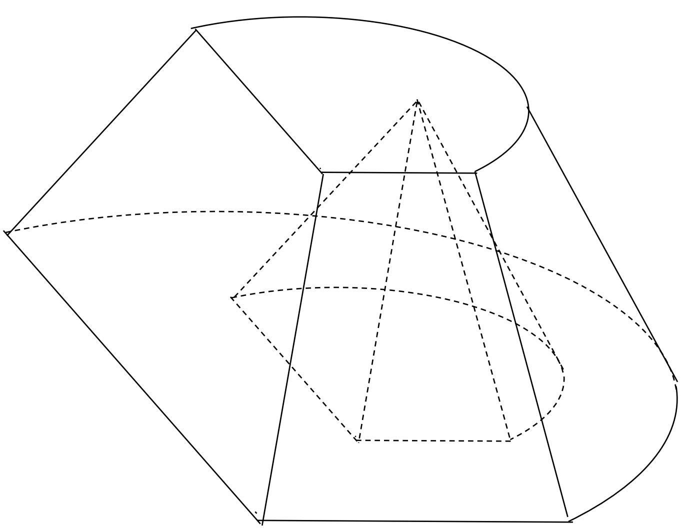
錐の体積は柱の体積の$\frac{1}{3}$倍である

＊用いる性質：相似形では　面積比、体積比は相似比の２乗及び３乗の比に等しい

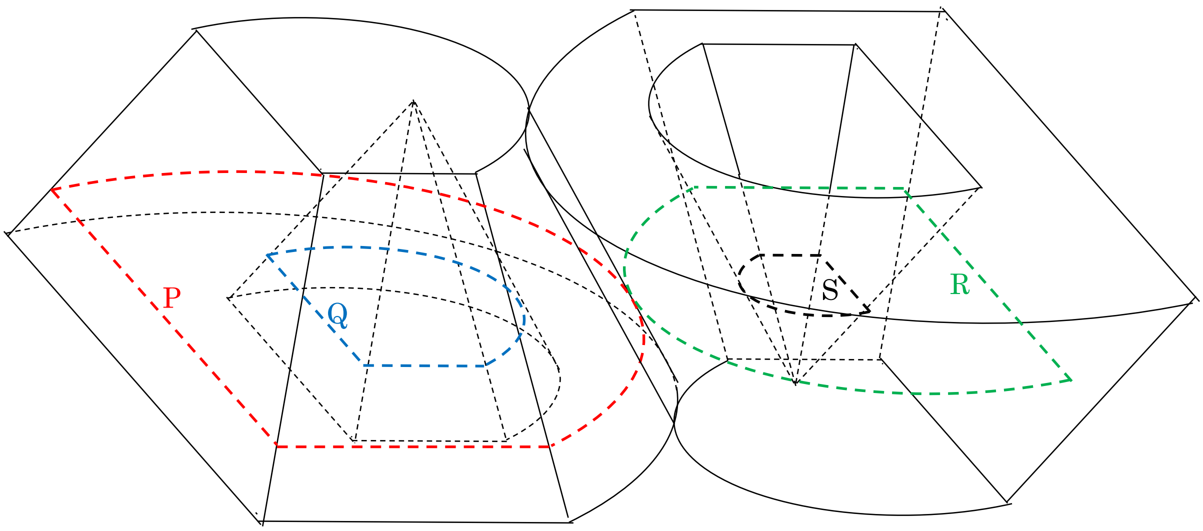
底面積A、高さｈの錐がある。　これを半分の高さの所で錐台と上部の錐に分ける。



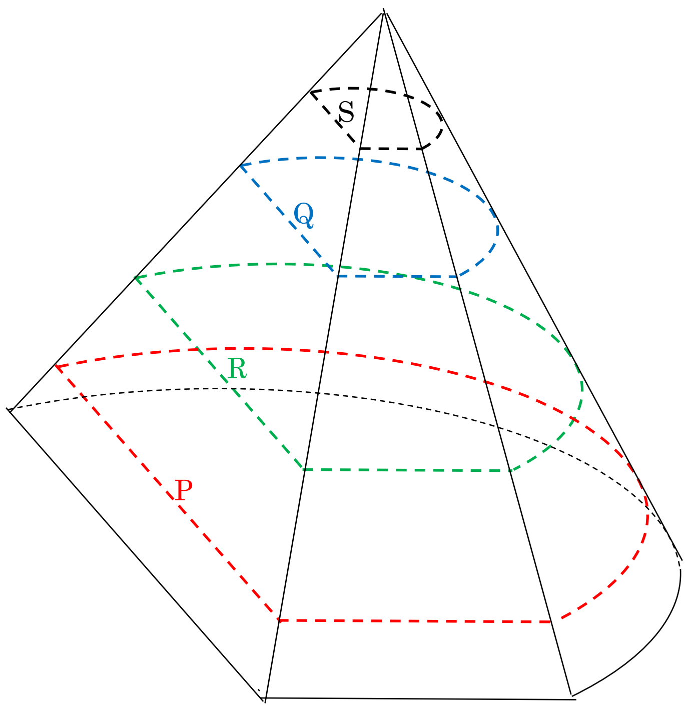
錐台から上部の錐分を抜き取った立体（穴空きの錐台）を考える。



穴空きの錐台を２つ用意し、下図のように一方は上下さかさまにして、合体させる。
合体した立体を下からｘの所で底面に平行に切る。
切り口は、Ｐ、Ｑ、Ｒ、Ｓの図形からなっている



Ｐ、Ｑ，Ｒ、Ｓの図形は、もとの錐の底面と相似であり、次の位置にある。



Ｐは高さ　$h-x$　の錐の底面

Ｑは高さ　$\frac{h}{2}-x$　の錐の底面

Ｒは高さ　$\frac{h}{2}+x$　の錐の底面

Ｓは高さ　x　の錐の底面

したがって、これら底面の面積は

$$P=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2 A \qquad Q=\left(\frac{\frac{h}{2}-x}{h}\right)^2 A \qquad R=\left(\frac{\frac{h}{2}+x}{h}\right)^2 A \qquad S=\left(\frac{x}{h}\right)^2 A$$

つまり、合体した立体を下からｘの所で切った切り口の面積は　(Ｐ－Ｑ)＋(Ｒ－Ｓ)　であるから

$$(P-Q)+(R-S)=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2 A-\left(\frac{\frac{h}{2}-x}{h}\right)^2 A+\left(\frac{\frac{h}{2}+x}{h}\right)^2 A-\left(\frac{x}{h}\right)^2 A$$

$$=\left[\frac{(h-x)^2}{h^2}-\frac{(h-2x)^2}{2^2h^2}+\frac{(h+2x)^2}{2^2h^2}-\frac{x^2}{h^2}\right]A$$

$$=\left[\frac{h^2-2hx}{h^2}+\frac{8hx}{4h^2}\right]A$$

$$=\left(1-\frac{2x}{h}+\frac{2x}{h}\right)A=A$$　・・・ｘにかかわらず定数Ａである

よって、合体した立体は高さ$\frac{h}{2}$だから、体積は　$A\times\frac{h}{2}=\frac{1}{2}Ah$

１つの穴空きの錐台の体積は　$\frac{1}{4}Ah$

今、錐の体積をＶとすると　穴あきの錐台の体積は　$\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]V=\frac{3}{4}V$

したがって、　$\frac{1}{4}Ah=\frac{3}{4}V$　より　$V=\frac{1}{3}Ah$

Ａｈは柱の体積であるから、　錐の体積Ｖは柱の体積の$\frac{1}{3}$倍である。