

文字式の導入の指導について

(数学科教育研究室) 藤本 義明

For the Teaching of Letter Sentences in Mathematics

Yoshiaki FUJIMOTO

(平成19年6月8日受理)

I はじめに

数学は記号の科学であるといわれるように、数学における文字や文字式は最も基本的で重要なものであると言える。したがって、数学教育においても、文字や文字式の指導は重要な学習内容であり、その指導のあり方の研究がいろいろと取り組まれてきた。しかしながら、文字を指導することはなかなか難しいというのが実際である。ただ、文字の指導が基本的で重要なものとして、いろいろな研究が取り組まれてきたからと言って、文字の基本的な事柄が教師や研究者に十分理解され、浸透しているのかというと、そうでも無いようである。例えば、数学教育の専門書において、プレースホルダーとしての文字が、文字の意味の1つとして取り上げられたり、取り上げられなかったりしている。このように、文字とは何かの解釈自体があいまいなままのようである。また、文字については、未知数として生徒に理解させることは指導しやすいが、一般的な数として捉えるさせるのは難しい。その原因の1つに、文字を使用することの必要性の問題もあると思われる。文字の導入において、例えば、「1個 a 円のりんご10個の値段を $a \times 10$ 円と表す」というような指導がなされるが、このような文字の使用には、文字の必要性は乏しい。文字式を利用して証明を行うような場面では文字を使う必要性はあるが、この場合は証明という行為自体が難しいということになる。このように、一般的な数としての文字の指導は難しいものであるが、文字の指導ではこの一般的な数としての文字が最初に指導され、分かりやすい未知数としての文字は後から

指導される。やさしいものから始めるという指導があっても良さそうだが、そのようなことはまず行われたい。また、一般的な数としての文字については、小学校で面積公式などが指導されているので、一般的な数としての文字を扱う下地は作られているのに、文字の指導は先の必要性の乏しいりんごの値段のような話から始まる。中学校の文字の指導は、小学校の公式の指導と分断されてしまっている。本稿では、画一的になっている文字や文字式の導入時の指導を見直してみたい。

II 文字式の導入における課題

§1 文字の捉え方

1. 現状

文字をどう捉えるか、その現状をみるために、手元にある資料を調べてみた。資料の抽出に作為はないが、以下の資料Aから資料Fについて、文字をどのように捉えているかをまとめた。ただし、 π のような特別な数を表す文字については割愛している。

<資料A>

菅沼忠夫「中学校における文字式と導入時の指導について」、『算数と数学』No.125、pp.42-43、1962年
(表す内容)

- | | |
|-------|---|
| ①定数 | 公式(言葉の簡略化) $l = 2\pi r$ を示す
未知の定数
任意の定数 |
| ②任意の数 | $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
| ③変数 | |

資料Aは、公式を「言葉の式」を簡略化したものとして、特別扱っている。文字式の表す内容によって5種類に分類されているが、文字の働きのような見方はされていない。

<資料B>

平林一栄「第2章式表示についての問題点と指導の要点」、『数学と思考』、pp.84-89
 *未知数を否定
 *プレースホルダー

資料Bは、記号□・△の見方について論じており、文字の分類を目的にしているわけではないが、未知数という見方は記号論的にふさわしくないとして、この見方を否定している。そして、方程式と不等式における文字の見方はそれぞれ異なるという捉え方をして、両者を統一してみる新しい変数概念として「プレースホルダー」の見方を推奨している。

<資料C>

杜威「学校数学における文字式の研究」東洋館出版、pp.48-51、1991年
 (文字の意味)
 ①定数
 ②未知数
 ③変数

資料Cは、「文字の意味」という観点に基づいて分類をしているが、「文字が表すもの」という言い方もしている。したがって、「文字が表すもの」という観点で分類しているともいえる。①定数には、一般数と任意の定数を含んでいる。一般数を定数とする説明は難解であり、このような見方は実用的とも思われない。

<資料D>

平岡忠「文字と式についての考察」、『中学校数学科教育実践講座』第3巻 ぎょうせい、pp.162-165、1994年
 (文字の表すもの)
 ①定数・・・任意の定数
 ②未知数
 ③変数
 (文字の意味)
 ①数の代表
 ②プレースホルダー

資料Dは、「文字が表すもの」と「文字の意味」の2つの観点によって分類している。文字が表すものとしては3種類の分類になっている。

<資料E>

宇田広文、添田佳伸「§3 式の指導とその背景」、数学教育学研究会編『新版 数学教育の理論と実際』聖文社、pp.102-103、2001年
 (文字の役割)

- | | | |
|------|---|--------------|
| ①定数 | } | 任意定数
一般数、 |
| ②未知数 | | |
| ③変数 | | |

(文字の意味)

- ①言葉や□・△の代わりとしての文字
 ②数の代表としての文字
 ③変数としての文字

資料Eは、「文字の役割」と「文字の意味」の2つの観点によって分類している。文字の役割は文字が表すものと見ることもでき、その種類は4種類である。役割における③変数と、意味における③変数としての文字が重なっているのが分かりづらい。文字の意味の①はプレースホルダーと同じと考えられる。

<資料F>

WEB資料

<http://mkkc.miyazaki-c.ed.jp/kenkyu/H16/tyusu.pdf>
 宮崎県教員研修センター 日南市立油津中学校
 2004年

文字式のよさを理解し、数量や関係を文字式で表す能力を高める指導の工夫

～変数としての文字のイメージを育てる指導や小テスト等の活用を通して～

(文字が用いられる場面)

- ①数の代表としての文字(原理や法則を一般的に表すための文字 $a + b = b + a$)
 ②未知数としての文字
 ③変数としての文字
 ④定数としての文字・・・任意の定数を表している場合($a x^2 + b x + c = 0$)

資料Fは、文字が用いられる場面という観点での分類であるが、文字が表すものとして捉えることも可能である。

2. 「表すもの」と「働き」による分類

資料Aから資料Fを較べてみると、文字の捉え方はすべて異なっている。つまり、文字の捉え方の統一された見解は存在しないことが伺える。文字の指導は数学教育の基本であり、きわめて重要なものであるにもかかわらず、その捉え方が不統一であることはきわめて不満足なことである。ものの捉え方に完全な統一を求めることは難しいことではあろうが、文字の捉え方にできるだけの統一性を求めることが必要である。

資料AからFの文字の捉え方に、完全な統一性はないが、ある程度の似通った傾向はみてとれる。資料D、Eは、文字を捉えるのに2つの観点をを用いており、表現上の違いはあるが、いわば、「文字が表すもの」と「文字の働き」という観点到相当する。そして、「文字が表すもの」という観点は、資料A、C、Fでもほぼ同様に採用されている。したがって、文字を捉えるには、「文字が表すもの」と「文字の働き」の2つの観点で捉えることとしたい。また、分類数については、さまざまな違いを生かして、できるだけ多数の分類をする方が無難であろう。「文字が表すもの」では資料Aの5種類が最大である。ただし、文字式を扱う上で、資料Aが示している公式と任意の数との区別は付きにくいので、両者をまとめる方が良いであろう。また、「文字の働き」としては、2通りが考えられる。以上をまとめると、文字は以下のように捉えることが妥当であると考える。

<p><文字の表すもの></p> <p>① 未知数</p> <p>② 一般数</p> <p>③ 任意の定数</p> <p>④ 変数</p> <p><文字の働き></p> <p>① プレースホルダー</p> <p>② 数の代表</p>	
--	--

②一般数：1個a円の物品5個の値段がb円であるときの論理式は

$$\forall a \exists b (5a = b), \forall b \exists a (5a = b)$$

恒等式 $x + 1 = 1 + x$ の論理式は

$$\forall x (x + 1 = 1 + x)$$

であるように、一般数を表す文字には全称限量子 \forall

がつき、いろいろな値をとる。

③任意の定数： $\forall a \forall x \exists y (y = ax + 1)$ 、

$$\forall a \exists x (2x - a > 0)$$

であるように、任意の定数を表す文字は他の文字を伴って、他の文字の限量子の前で全称限量子 \forall によって束縛されることがほとんどである。

④変数：いろいろな値をとるが、徐々に変化する値をとる。変数を表す文字は関数式で用いられる。

3. 2つの観点の関係

文字を2つの観点から捉えることは資料CやDでも行っているが、そのような捉え方が定着しないのは、2つの観点が指摘されているだけで、両者の関連が明らかにされていないことに原因があると思われる。「変数」を表している文字が、「数の代表」として扱われていることがあるのかどうか、それがあいまいなままでは2つの観点自体の存在も確定しがたい。ここでは、文字が表すものと文字の働きとの関連を示すために、それぞれが存在する具体例を示してみる。ただし、文字の働きを示すには、何かの操作を行っている方がつかみ易いと思われるので、ここではあえて操作の具体例を示すことにする。

働き 表すもの	プレースホルダー	数の代表
未知数	① 方程式 $2x - 4 = 0$ から 解 $x = 2$ を求める	② 不等式 $2x - 4 > 0$ から 解 $x > 2$ を求める
一般数	③ 公式 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ を確かめる $(2+1)^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$	④ 公式 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ を証明する。 (左辺) = $x^2 + x + x + 1$ = (右辺)
任意の定数	⑤ 関数式 $y = ax$ から、 具体例 $y = 2x$ を示す	⑥ 関数式 $y = ax$ から、 比例定数 $a = \frac{y}{x}$ を示す
変数	⑦ 関数式 $y = x^2 + 2x$ から $x = 1$ における y の 値 $y = 3$ を求める	⑧ 関数式 $y = x^2 + 2x$ から、 $y = (x+1)^2 - 1$ として、 グラフを描く

①について：方程式自体、そこに含まれる未知数を表す文字はプレースホルダーとして扱われるものである。また、不等式も方程式と同様に、未知数を表す文字はプレースホルダーとして扱われるものである

と言える。

②について：資料Bで平林は次のことを指摘している。方程式の未知数は受け入れやすいが不等式の未知数は受け入れがたく、ブレースホルダーは方程式と不等式を同一に見るために導入された見方である。これにより、文字が定数と変数の2つだけの観点で捉えられている。¹⁾ 平林の説明は現代化時代の時代的背景があるので、この時期特有の見方であると共に、記号論的に明瞭な捉え方ではあるが、実際の指導上は困難な捉え方である。未知数のような捉え方が含まれるほうが指導しやすい。しかし、平林の指摘のように、方程式と不等式には違いがあるともいえる。解が有限集合であるのと無限集合であるのとでは認識上、かなりの相違がある。不等式を式変形するとき、未知数を表す文字は数の代表として処理されていると見ることもできる。

③について：当然のことながら、一般数を表す文字には、数値を代入することができる。

④について：一般数は、その言葉が示しているように、公式自体として既に、数を代表している。

⑤について：当然のことながら、任意の定数を表す文字には、数値を代入することができる。

⑥について： $y = ax$ の a に数値を代入するのではなく、 $a = \frac{y}{x}$ と式変形数するとき、 a は比例定数という数を代表して扱われている。

⑦について：当然のことながら、変数を表す文字には、数値を代入することができる。

⑧について：関数式を式変形するとき、文字は数を代表して扱われている。

§2 文字の導入順序

1. 現状

現行の中学校学習指導要領においては、先の「文字が表すもの」によって異なる4つの文字は、中学校第1学年で導入される。その順番は、A. 数と式の分野で、最初に「一般数」を表す文字、次に、一次方程式で「未知数」を表す文字、という順番である。学習指導要領に明記されていないが、一次方程式を定義する際に「任意の定数」を表す文字が使われる。そして、C. 数量関係の分野で「変数」を表す文字が指導される。現

行教科書はどれも学習指導要領に沿い、A. 数と式、C. 数量関係の順に扱っているので、「一般数」、「未知数」、「任意の定数」、「変数」という指導順序は完全に定着していると言える。文字指導で、生徒に理解が難しいとしてよく議論に登るのは、「一般数」を表す場合と「変数」表す場合である。「未知数」を表すことが問題になることはほとんど無いし、「未知数」を表す文字の理解は得やすい。指導上の話題は「一般数」、「変数」に集中するので、「任意の定数」は話題にされることがほとんど無い。では、理解しやすい「未知数」を後回しにして、「一般数」が最初に導入されることが、どうして定着しなければならないのであろうか。理解しやすいものを先に指導することは、いままでになかったのだろうか。このような点を明らかにするために、文字の導入の順番について、数学教育の歴史をたどってみる。

2. 歴史的考察

戦前の中学校数学は、現在の中学校段階で算術、代数、幾何、現在の高校段階で、代数、幾何、三角法の各分野が、各分野独立して教えられた。例えば、昭和11年の算術代数の教科書では次のような内容が扱われた。

昭和11年 高等師範学校附属中学校内数学研究会
『中等教育算術代数 上』
第1章 整数・小数・分数
第2章 ぐらふ
第3章 文字の使用
30. 方程式
31. 引算ニヨッテ解ク方程式
32. 応用問題
33. 積ノ書方
34. 割算ニヨッテ解ク方程式
35. 掛算ニヨッテ解ク方程式
36. 寄算ニヨッテ解ク方程式
37. 方程式ヲ解ク原理
38. 問題ノ意味ノ表ハシ方
39. 応用問題
40. 同類項
41. 文字因数ヲ含ム項ノ掛算
42. 括弧
43. 分数

44. 公式
45. 冪
雑問題
第4章 負数

代数の内容は、方程式を解くことが主目的であり、「未知数」を表す文字しか扱われていない。「一般数」を表す文字は量を背景としているので、代数では扱われない内容である。小学校の延長である高等小学校のようすをみても、以下にあるように、方程式が主となっている。

昭和3年 『高等小学校算術書 第一学年』
I 整数・小数・分数
II 代数式
 負数
 一次方程式
 整式
 連立一次方程式
 分数式
III 幾何図形

各分野が独立していた数学教育は、いわゆる近代化運動頃から批判されるようになり、徐々に、総合主義の教科書も現れるようになっていった。戦後、文部省が出した中学校の教科書も総合主義の考えを取り入れ、第一類（代数と解析）、第二類（幾何）の形をとっている。

昭和21年 文部省『中等数学一 第一類』
図表ト式
一 統計図表
二 文字ノ使用
三 方程式
四 種々ノ問題
比例
正ノ数 負ノ数

この文部省の教科書では、方程式の前に文字の使用を置き「一般数」を表す文字が扱われている。このような文字の扱いの順番は、学習指導要領にも引き継がれていく。

昭和23年 文部省「算数数学科指導内容一覧表（算数数学科学習指導要領改訂）」
第八学年

- 4 日常生活に表れる量や、その間の関係を文字や式によって表わす。
- 5 日常生活に起こる問題を、方程式を用いて解く。

この学習指導要領の形は、その後のいずれの指導要領の改定においても変化していない。教科書も学習指導要領を反映して、「一般数」の後で「未知数」という指導順序を定着させて来た。

以上の変遷からわかるように、戦前における中学校での文字の指導では、方程式における「未知数」を表す文字の指導から始まるが多かった。現在の指導の順番は、戦後の文部省発行の教科書において決定され、この順番が学習指導要領の記述にも踏襲された。各教科書も学習指導要領の記述の順番を守ったことで、文字の指導の順番が定着していった。

III 文字式の導入方法

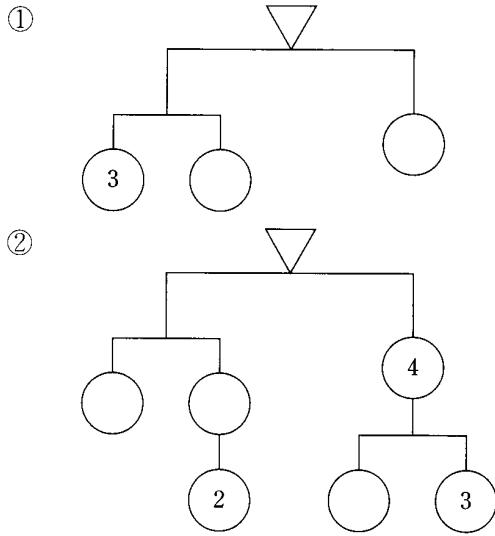
§1 未知数としての文字

前節で見たように、文字の導入は、戦前には未知数から始められるのが普通であった。戦後は一般数から導入されるようになったが、それについて、特別な研究がなされてのことという訳でもない。文字式の導入を、生徒にとって理解しやすい「未知数」を表す文字によって行うべきであるというのが、本稿の主張である。ここで、その導入の具体例を示してみたい。その際、方程式の指導を前倒して、最初に行なおうというのでは無い。導入では、方程式を表現するのではなく、「未知数」を表す文字を数のように扱わせることを提案したい。文字の導入では、文字を数のように扱うことにより、文字に親しませることが大切であると考え。

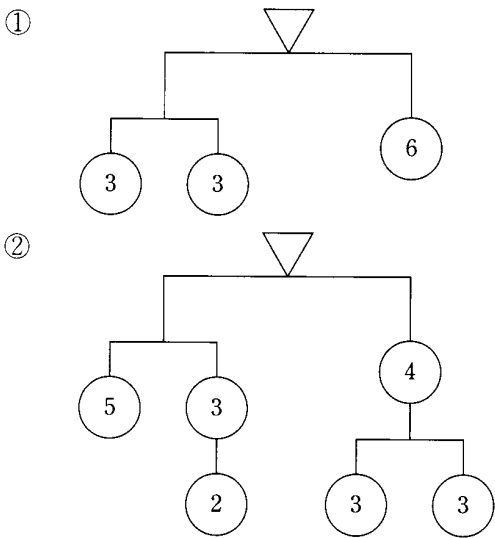
1. 数

文字を扱う準備として、数を扱う所から始める。下記の例のように、左右の合計数がつりあいを取る「モービル」のようなシチュエーションを用意する。

[例] 左右がつりあうようにするには、○にどんな数を入れればよいか。



[答]

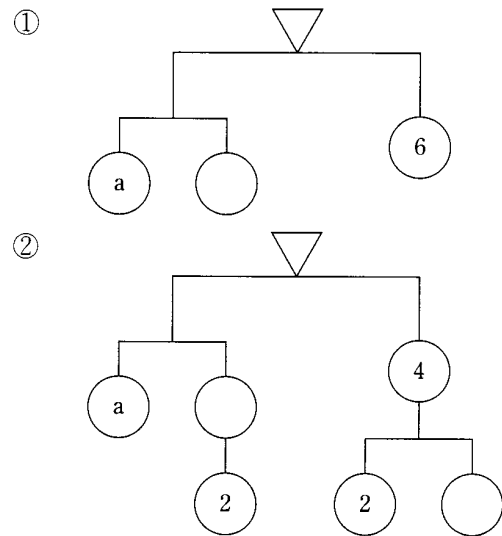


2. 文字

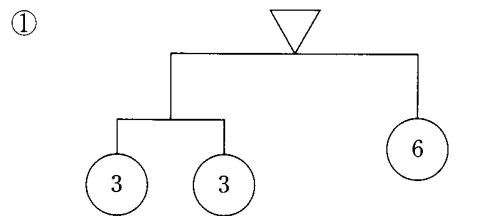
1. 数にならない、未知数および任意の定数としての文字のモービルを完成させる。ただし、□のm個分を $\square \times m$ と表すことにする。

(1) 未知数

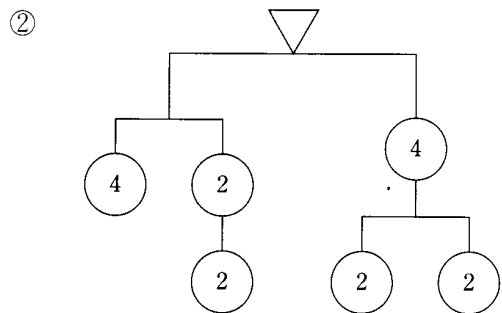
[例] 左右がつりあうようにするには、aはどんな数であればよいか。



[答]



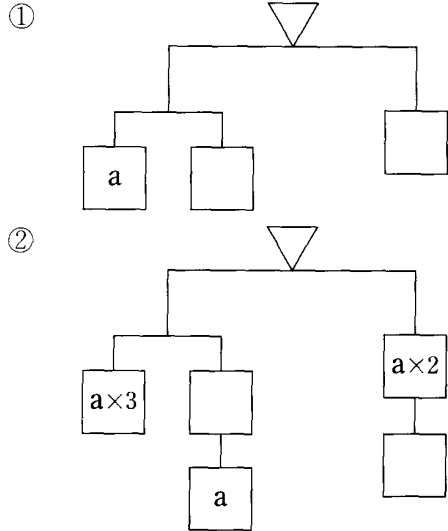
したがって、 $a=3$



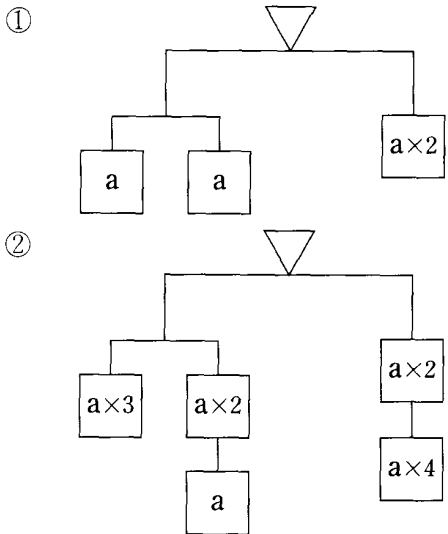
したがって、 $a=4$

(2) 任意の定数

[例] 左右がつりあうようにするには、□にどんな文字と数を入れればよいか。



[答]

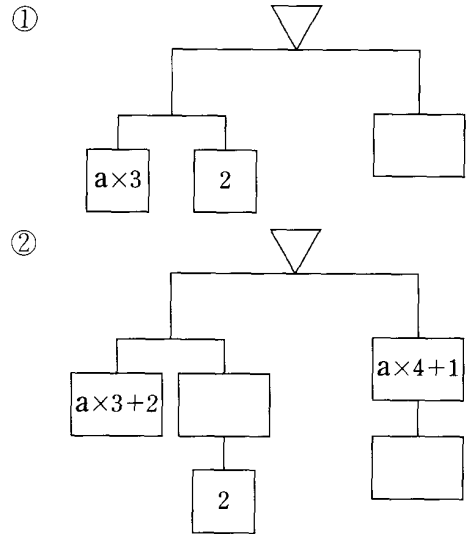


ただし、85ページの説明とは異なって、ここでは他の文字を伴っていないが、任意の定数という見方と考えてよい。

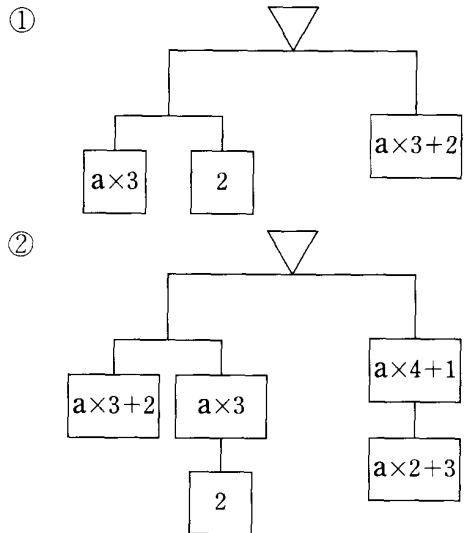
3. 文字式

文字式 $a \times m + n$ を表現させる。

[例] 左右がつりあうようにするには、□にどんな文字式や数を入れればよいか。



[答]



§ 2 一般数

先の資料Aでは、公式を「言葉の式」を簡略化したものとして、特別な見方をしていた。このことは、公式が小学校につながっているのに、中学校の文字式につながっていないことを表している。実際、中学校の文字の指導は、小学校の公式とは切り離されて指導されている。小学校で扱う公式をもとに、文字式の導入を図ることをも、本稿の提案の1つである。ここでは、長方形の面積の公式を利用する例を示す。

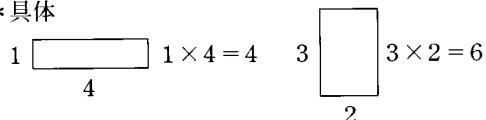
1. 公式

(1) 具体～言葉の式～省略文字

具体的な長方形から、言葉の式による公式を導く。

この過程は小学校で既習である。さらに、文字の導入の第一歩として、言葉の式を省略文字の式に置き換える。

*具体



*言葉の式

たて×よこ=面積

*省略文字

$$\textcircled{た} \times \textcircled{よ} = \textcircled{め}$$

(2)数値の代入

省略文字の式に親しませ、さらに、プレースホルダーとしての文字の働きを認識させるために、数値を代入させる。

[例] $\textcircled{た} = 2$ 、 $\textcircled{め} = 6$ であるとき、 $\textcircled{よ}$ はいくらですか。

[答] $\textcircled{よ} = 3$

(3)公式の変形

省略文字の公式を変形させ、いろいろな式表現が可能なることを認識させる。

[例] $\textcircled{よ}$ を $\textcircled{め}$ と $\textcircled{た}$ を使って表しなさい。

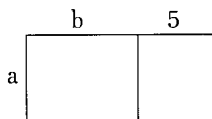
[答] $\textcircled{よ} = \textcircled{め} \div \textcircled{た}$

2. 文字式

面積の公式を「一般化」を表す文字の式として認識させるために、公式を利用して省略文字や○、△の記号の式を変形させる。

(1)公式のプレースホルダーとしての利用

[例] $\textcircled{め} = \textcircled{た} \times \textcircled{よ}$ を使って、 $\textcircled{め}$ を記号で表しなさい。



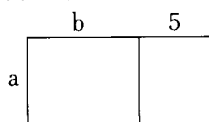
[答] $\textcircled{め} = a \times (b + 5)$

(公式への代入だから、 $\textcircled{め} = a \times b + a \times 5$ は認めない。)

(2)式変形

記号の式の変形を行わせる。

[例] $\textcircled{め} = a \times (b + 5)$ から、 b を $\textcircled{め}$ やその他の文字や数字を使って表しなさい。



[答] $b = \textcircled{め} \div a - 5$

§ 3 変数

文字の指導において、変数を表す文字を指導することも難しいと言われている。変数を表す文字は、 $y = x^2$ のような関数式において現れる。このとき、変数を表す文字の理解が難しいというよりも、関数の考え自体が難しいという面がある。したがって、文字の導入期に変数を表す文字を扱うことは適切ではない。変数を表す文字は、関数の指導場面において扱えばよい。

Ⅳ おわりに

本稿では、文字や文字式の導入にあたって、未知数としての文字から導入することや、小学校での公式の指導と結び付けての指導を提案した。ただし、この案に沿った実践は行っていないので、今後は、小学校の最終期や中学校の最初期に実践を行って、本稿の検証を行わなければならない。それは、小学校と中学校の連結を図ることにもなるであろう。