

第7章 「図形」の教材研究と指導事例

第1節 「図形」の教材研究

この節では、図形分野の指導について、教材の背後にある数学的・心理学的な背景や指導方法の例、および指導上留意する点などを説明する。図形分野では、図形の性質を暗記すればことが足りると思われがちであるが、図形の問題や知識が活用されるには、図形の性質の暗記では不十分であり、図形にかかわった算数的活動をさせることが大切となる。

1. 図形分野の学年配当表

学年	内 容	算 数 的 活 動
1	*身の回りにあるものの形(平面図形、立体図形)の観察や構成	*形を見付けたり、作ったりする活動
2	*三角形、四角形 *直角三角形	*正方形、長方形、 *箱の形
3	*二等辺三角形、正三角形	*角 *円、球
4	*直線の平行や垂直の関係 ひし形、台形 *ものの位置の表し方	*平行四辺形、 *立方体、直方体
5	*多角形や正多角形 *図形の合同 *図形の性質 *円周率 *角柱、円柱	*合同な図形をかいたり、作ったりする活動 *図形の性質を帰納的に考え説明したり、演繹的に考え説明したりする活動
6	*縮図や拡大図 *対称な図形	*縮図や拡大図、対称な図形を見付ける活動

2. 概念・用語の定義

図形をはじめ、概念にはさまざまな特徴がある。その特徴のひとつをその概念の定義とする。すると、他の特徴は、その概念がもつ性質となる。すなわち、どの特徴を概念の定義とするかは、あらかじめ決まっているわけではない。以下では、図形の各概念や用語について、その代表的な定義を示しておく。

(1) 無定義用語：日常的な言葉として、定義をしないで使用するもの

<1・2年>形、線、点、長さ、三角、四角、かど、

(2) 操作的定義：紙を折ったりした結果によって、あるいは具体的なものを例えにして、その意味を与えるもの

<2年>直角、はこの形、はこの面・辺・頂点

<3年>円、球

<5年>図形の合同、立体、面の平行・垂直、角柱・円柱

<6年>線対称・点対称、拡大図、縮小図

(3) 概念・用語の定義

概念・用語	定義	学年
直線	まっすぐな線	2年
三(四)角形	3(4)本の直線でかこまれた形	2年
頂点、辺	(三角形・四角形で) かどの点、まわりの直線	2年
長方形	ぜんぶのかどが直角である四角形	2年
正方形	かどが全部直角で、辺の長さがみな同じ四角形	2年
直角三角形	1つのかどが直角になっている三角形	2年
円の中心、半径	円の真ん中の点、中心から円のまわりまでひいた直線	3年
直径	中心をとおってまわりからまわりまでひいた直線	3年
球の中心・半径・直径	球をま2つに切った切り口の円の、中心、半径、直径	3年
二等辺三角形(正三角形)	2つの(3つの)辺の長さが等しい三角形	3年
角	頂点から出ている2つの辺がつくる形	3年
垂直である	2つの直線が交わってできる角が直角である	4年
平行である	2つの直線が1つの直線に垂直である	4年
台形(平行四辺形)	向かい合う1組(2組)の辺が平行である四角形	4年
ひし形	辺の長さがみんな等しい四角形	4年
対角線	四角形の向かい合った頂点をむすんだ直線	4年
直方体	長方形や、長方形と正方形で囲まれた立体	4年
立方体	正方形だけで囲まれた立体	4年
平面	平らな面	4年
合同、対応する頂点・辺	図形が重なり合うこと、重なり合う頂点・辺	5年
多角形	直線で囲まれた形	5年
正多角形	辺の長さや角の大きさがみんな等しい多角形	5年
底面、側面	上下の面、横の面	5年
曲面	曲がった面	5年

(4) 留意点

①直線

数学では、直線、半直線、線分を区別するが、算数では、いずれも直線と呼ばれる。曲線と対比して、まっすぐという観点でとらえていることによる。

②三角形

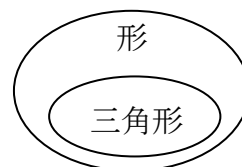
三角形には、一般の三角形、不等辺三角形、二等辺三角形、正三角形があるが、算数では、一般の三角形、不等辺三角形をともに三角形と称している。四角形の場合も同様である。

3. 図形の概念形成

(1) 図形の概念

算数科では、低学年で三角形・四角形といった図形を指導する。この三角形・四角形という図形は、概念であることに着目しなければならない。ともすると、図形を紙のような具体物と捉えてしまいがちだが、図形は頭の中につくられるべき概念である。

また、三角形の場合、「三角の形」という言い方がされるように、「形」というより広範な概念の特別な場合として、三角形の概念がある。したがって、図形の概念形成では、はじめに、「形」の概念形成が行なわれる必要がある。「形」にしる「三角形」にしる、図形分野の概念形成では、具体物をたくさん提示し、それを仲間分けすることで概念形成を図ることが基本である。



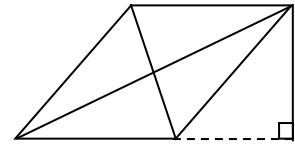
(2) 図

数は概念であり、数概念を表すために数字があった。これと同じように、図形も概念であり、本来、頭の中に構成するものである。そして、図形概念を表す手段が図である。図の性質を概念の性質を比較してみると、図には次のような特徴があるので、図で表現される図形概念の指導には、これらの特徴について配慮する必要がある。

①イメージ性・・・図の心理的機能

図は図形についてのあるイメージ、つまり、映像的で、硬直化した意識を生じさせやすい。このイメージのおかげで、我々は図形を記憶したり、頭の中で操作したりすることが容易にできる。しかしながら、図のイメージ性は、図形

についての余分な情報を与えることもある。例えば、平行四辺形の対角線の性質を考えると、平行四辺形は斜めになっているという意識が強いと、右図のように垂線を下ろして直角三角形を作って考えるなど、余分な意識も生まれやすい。



②固有性・・・図の論理的機能

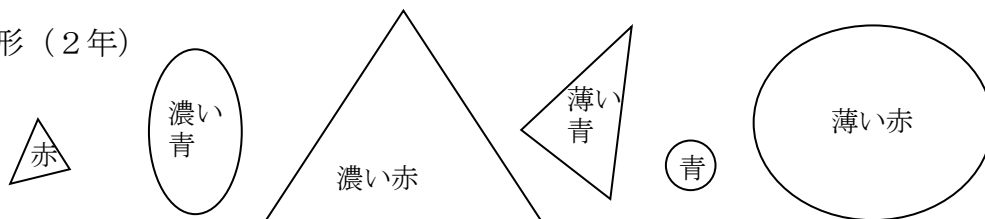
一つの図は図形概念のうちの一つの固有な概念を表すので、一つの図から図形概念の一般性・普遍性を意識することはむずかしい。ときには、眼前の図に固執してしまい、一般性・普遍性を全く意識できないこともある。したがって、図を用いて図形概念を指導する場合、考え得るいく種類かの図を提示することによって、一般性・普遍性を保障する必要がある。

(3) 図形の概念形成の指導

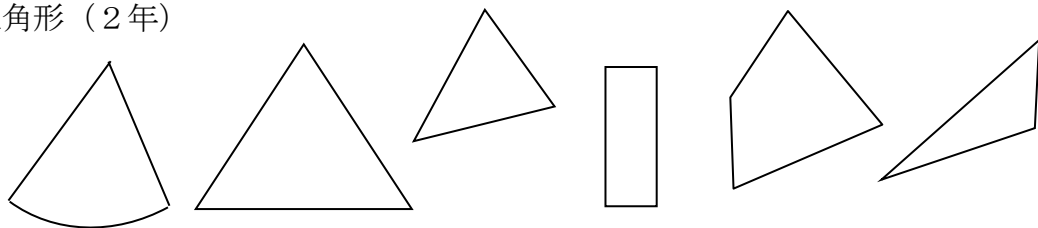
「なかま分けをしよう」(2年)

形や三角形の概念形成をするとき、紙で以下のような形を作って与え、なかまづくりをさせる。形の概念形成にあたっては、色や大きさによる分類と対立させて、同じような形の仲間を意識させる。三角形の概念形成にあたっては、さまざまな形の中で、辺の数や角の数を基準にして、三角形のなかまを意識させる。いずれの活動においても、なかまができた後、別の紙を提示して、それがなかまに入らない理由や入らない理由を考えさせることが大切である。それにより、なかま分けの観点、つまり概念をより意識させることができる。

*形(2年)



*三角形(2年)



4. 構成と分析

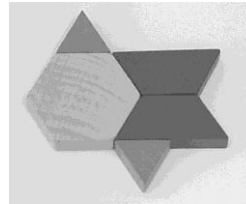
(1) 「構成は分析に先立つ」

ものごとを理解するとき、その性質をよく調べると、そのものを理解できると考えられる。例えば、正方形を理解するには、正方形の性質を調べることが必要だと考えられる。しかし、はじめて正方形を理解しようとするときには、まず、正方形を作ってみることが、理解を促進させる場合が多い。一般には、「構成は分析に先立つ」と言われる。図形の分野では、概念形成の最初は、まず、構成する活動を重視したい。

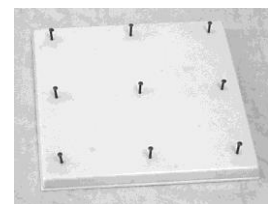
最も簡単な図形の構成方法は、フリーハンドで図をかくことである。そして、できるだけ正確にかくように求めれば、三角形・四角形では「まっすぐにかきたい」と思うであろうし、円の場合は「きれいに、どこも同じような曲がり方でかきたい」と願うであろう。ただ道具の使い方を知るのではなく、どのような図を書きたいのかという意識が大切である。その他、紙を折る、紙を切る、ストローや棒をつなげるなど、いろいろな方法がある。できるだけいろいろな構成を行なわせたい。

(2) 平面図形の教具

図形を構成する活動を助けるための教具としては、「パターンブロック」や幾何板がある。これらの教具を操作する中で、図形の辺や角についての理解を深めることが期待される。



<パターンブロック>

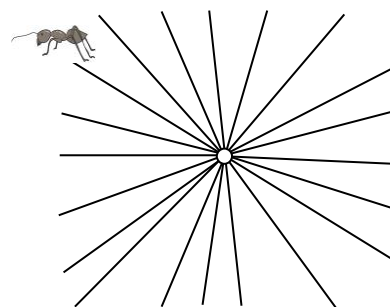


<幾何板>

(3) 構成的活動の指導

② 「アリがつくるかたち」(3年)

『アリがすのあなから出て、いろいろな方向にまっすぐ10cm進みました。アリのいる所を点で表しましょう。点をたくさんふやすと、どんな形になるか、予想をしてかきましょう。』
点をかいた後、フリーハンドで予想した形をかかせる。



① 「幾何板で四角形を見つけよう」(4年)

幾何板は板に格子状に釘が打たれた教具である。釘に輪ゴムを引っ掛けて、輪ゴムの四角形を作らせる。なるべく多くの種類の四角形を作らせる中で、合同な図形を1種類とみなすこと、凹四角形も四角形に含まれることなどを確認する。

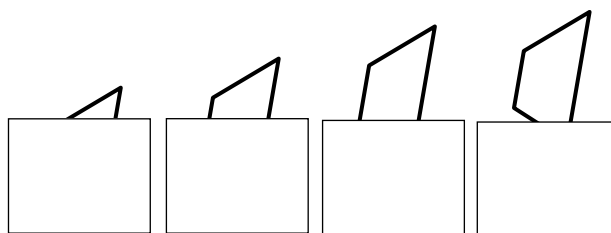


<凹四角形>

(4) 四角形の性質の指導

「どんな四角形でしょうか」(5年)

紙で作った四角形を画用紙で隠した状態から、徐々に引き出して行き、図形の性質を確認させながら、どのような四角形の可能性があるかを考えさせる。



6. 図形の分類

(1) 二分法的分類と包摂関係による分類

ものを分類するとき、大きく分けて2つの分類方法がある。一つは二分法を代表とするもので、例えば、三角形を、正三角形、二等辺三角形、(不等辺) 三角形の3種類に分類するものである。一方、上位の概念、下位の概念のように、段階を付けながら分類する方法がある。これを包摂関係による分類という。例えば、三角形を分類するのに、一般の三角形を土台の下位概念として、その一部分が二等辺三角形、さらに、二等辺三角形の一部が正三角形とする方法である。

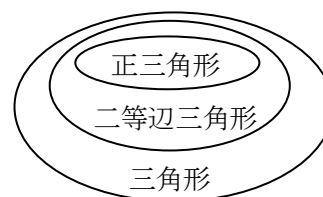


図1

子どもの図形概念は、はじめは、二分法的な分類に相当している。つまり、三角形については、正三角形、二等辺三角形、(不等辺) 三角形は、それぞれ

全く別のものであると捉える。高学年になると、部分的に包摂関係による分類に相当した捉え方ができるようになる。正三角形は、その2辺の長さが等しいので、二等辺三角形でもあると、捉えられるようになる。

(2) 内包と外延の関係

「ネコ」とは何かを幼児に説明するとき、実際にネコを何匹か見せるとわか

りやすい。しかし、それだけでは、犬を見ても、幼児はネコだと思うかも知れない。ネコを理解させるには、ネコの説明をすることも必要だろう。例えば、爪がとがっている、ミャーと泣くなど。ネコ一般、つまり、「ネコ」の概念を知るには、個々のネコを見る方法と、ネコのもつ特徴や性質を知る方法とがある。

このように、概念は、それを示す個々のもの全体と、それがもつ性質の全体という2つの観点で捉えられる。前者を概念の外延、後者を概念の内包という。例えば、「正三角形」という概念の外延と内包は、右の図2のようである。

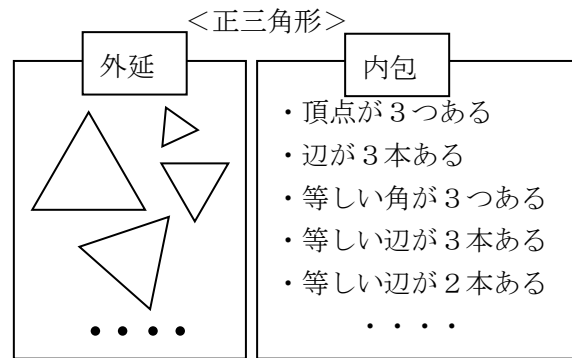


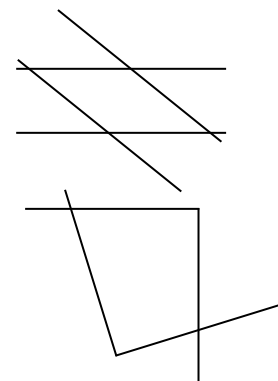
図2

図1は三角形の各概念の外延の関係を示した図になっている。正三角形の外延は二等辺三角形の外延に含まれている。ここで、それぞれの内包を考えると、図2からわかるように、正三角形の内包は、二等辺三角形の内包にいくつかの性質（等しい角が3つある、等しい辺が3本ある、など）を加えたものであるから、正三角形の内包は二等辺三角形の内包を含んでいる。つまり、概念が特別なものになって、外延が小さくなるにつれて、概念の内包は逆に大きくなるという性質がある。

(3) 包摂関係の指導

「重なりがつくる四角形」（5年：発展学習）

平行線や直角がかかれた透明シート2枚を用意し、2枚を重ね合わせて、いろいろな四角形を作らせる。片方のシートを平行移動や回転移動など、一定の動きをさせて、そのときの四角形の変化を整理させる。



7. 立体図形

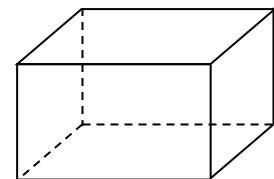
(1) 立体図形の概念

立体を図形として捉えることは、第2学年の「はこのかたち」から始まる。ここで、頂点、辺、面を理解させる。はこのかたちは、第4学年で直方体や立

方体として扱われることになる。第4学年では、直線や平面の平行、垂直といった関係を理解させる。立体図形の概念形成は、平面図形と較べるとはるかに難しい。例えば、平面図形の基本操作である重ね合わせを立体図形で行なうことはできない。立体図形の表現方法や操作的活動を工夫して、立体図形の概念形成を行なう必要がある。

(2) 見取り図・展開図

見取り図と展開図は、学習指導要領で指定された指導内容ではないが、学習指導要領の解説において、立体図形を表現する手段として示されている。図で表現することにより、立体図形の性質の理解を深めることが大切な目的である。見取り図をかく技能としては、次の2点を押さえる程度の指導を行なうと良い。



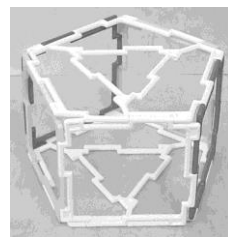
<見取り図>

①立体図形の平行な辺は、見取り図でも平行にかく

②背後の見えない辺は、点線でかく

(3) 立体図形の教具

立体図形の指導では、児童一人ひとりが教具を操作することが大切である。そのための教具として、右図のアの「ジオフィクス」、イのストローの中にクリップを埋め込んで繋ぎ合わせる教具などがある。



ア



イ

8. 合同と相似

(1) 合同の定義

多角形の合同の定義には、次の2通りの方法がある。

①互いをぴったりと重ね合わせることができる

②対応する辺の長さや角の大きさがそれぞれに等しい

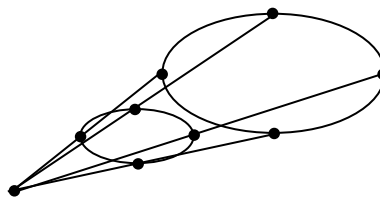
これらの一方を定義とすれば、他方はその多角形の性質となる。複雑な曲線で囲まれた図形の合同を考えると、②のような合同の定義のしかたはきわめて難しいことが分かる。曲線の場合も含めて、図形の合同の定義は、ふつう①で行なわれる。また、小学生にとっても、①の定義の方が理解しやすい。

(2) 相似の定義

縮図・拡大図という内容は、数学的には図形の相似にあたる。多角形の相似の定義には、次の3通りの方法がある。

- ①一定の割合で拡大・縮小して互いをぴったり重ねあわせることができる
- ②対応する辺の長さの比がすべて等しく、角の大きさがそれぞれ等しい
- ③相似の位置におくことができる

曲線で囲まれた図形を考えてみるとわかるように、③の方法が最もあいまいさのない定義であり、中学校ではこの定義が用いられる。



<相似の位置にある2つの図形>

しかし、直感的であるが、もっとも分かりやすい方法は①であるので、算数科では、①が相似の定義とされる。

また、縮図・拡大図を実感としてとらえさせるには、パソコンの拡大・縮小機能を利用して、図形を徐々に変形させていくのが良い。

(3) 縮図の利用の指導

「遠足を計画しよう」(6年)

遠足のルートの長さを、縮図を利用して求める。曲線のルートであっても縮図が利用できることを実感させる。

<用意するもの>

透明の両面テープ、糸、
地図

<活動>

地図上で、遠足のルートに透明な両面テープを貼っておく。糸をルート上に貼り付けて行き、糸の



長さを測定する。地図の縮尺を用いて、実際のルートの道のりを計算する。

9. 対称な図形

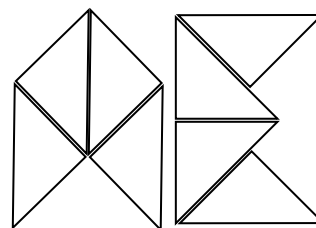
(1) 対称性

平面図形の対称性としては、線対称と点対称があり、それぞれ、対称軸と対称の中心により規定される。対称な図形に対して、対応する点をいくつか結びせると、対称軸や対称の中心を意識させることができる。

(2) 線対称な図形の指導

「線対称な図形をつくろう」(6年)

直角二等辺三角形の紙をたくさん準備し、これを繋ぎ合せて線対称な図形を自由に作らせ、使用した枚数ごとに整理したりする。未完成な図を示した後、1枚加えて線対称な図形を完成させる活動も有益である。



10. ファン・ヒーレの学習水準理論

オランダの数学教育学者ファン・ヒーレは、幾何の学習を、学習対象と学習方法の観点でとらえることにより、幾何の学習には表1のような5つの水準があることを示した。これは学習水準理論と呼ばれ、数学学習を進めていくための基本的モデルとして評価されている。わが国の学校種では、小学校が第0～第2水準、中学・高校が第3水準、大学が第4水準にあたる。

水準	0	1	2	3	4
対象	具体物	図形	性質	命題	論理
方法	図形	性質	命題	論理	
活動の例	ノートと窓枠は同じ仲間である (認識・分類)	二等辺三角形の2辺の長さは等しい (分析・観察)	合同な2つの直角三角形より、「二等辺三角形は、2つの角が等しい」 (整理・説明)	いくつかの命題からある命題を証明する (証明)	公理的体系を理解する (精緻)

表1

ファン・ヒーレの学習水準理論では、水準の前段階で方法であったものが、次の段階の対象になっている所が、大きな特徴である。この理論から、数学の学習は、方法を対象化することにより、学習の質を変えながら進んでいくということが、示唆される。